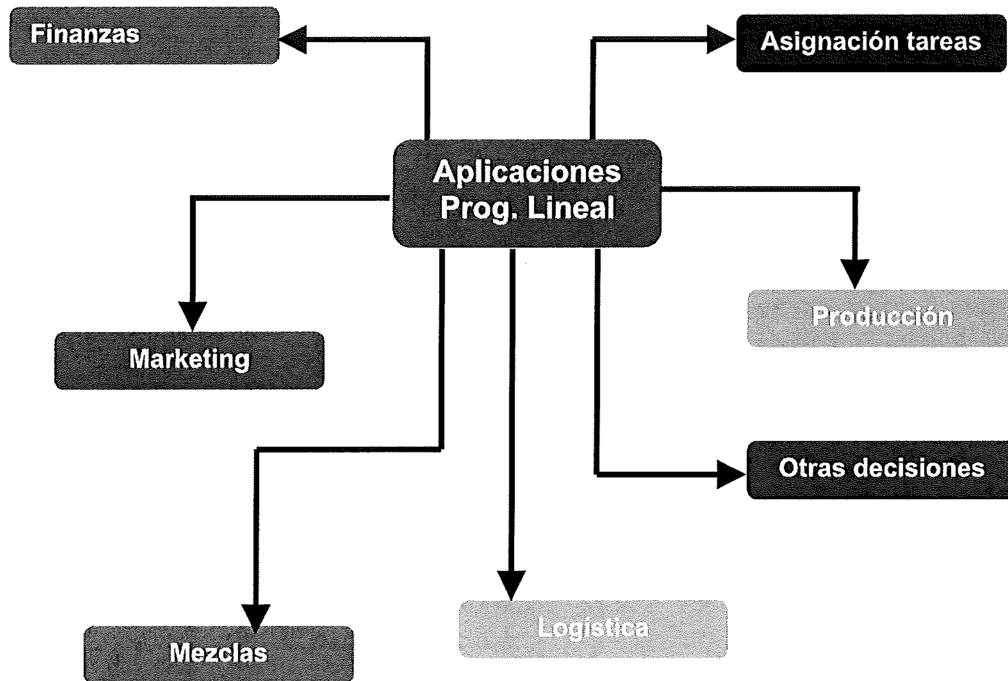
APLICACIONES DE LA PROGRAMACIÓN LINEAL

Autores: Javier Faulin (ffaulin@uoc.edu), Ángel A. Juan (ajuanp@uoc.edu).

ESQUEMA DE CONTENIDOS



INTRODUCCIÓN

Después de estudiar detalladamente los conceptos básicos de Programación Lineal ubicados en un contexto de aplicaciones de la Investigación Operativa en el mundo empresarial e industrial, se hace preciso describir cómo es posible aplicar los conceptos anteriores en diferentes situaciones prácticas. Este desarrollo de situaciones del mundo real constituye el auténtico desarrollo de la programación lineal. No se tratan de meras aplicaciones, sino del campo específico natural de desarrollo de la programación lineal. Sin casos prácticos como los que aquí se van a desarrollar no se hubiera dado el auge real de esta técnica operacional. Por otra parte, el conocimiento de aplicación de los principales conceptos de programación lineal permite plantear la resolución de nuevos casos prácticos que surgen día a día en la Empresa, la Industria y la Ingeniería.

De esta forma, el objetivo de este capítulo es mostrar el vasto número de problemas de la vida real que pueden ser abordados mediante las técnicas de programación lineal. Presentaremos aplicaciones a áreas tan diversas como dirección de la producción, investigación de mercados, marketing, logística, finanzas, etc. En todos esos ámbitos, la programación lineal se revela como herramienta insustituible en la toma de decisiones.

OBJETIVOS

- Conocimiento detallado de la Programación Lineal en el mundo real.
- Conocimiento detallado de los principales problemas que resuelve la Programación Lineal.
- Adquisición de habilidades para el planteamiento y resolución de nuevos casos reales.
- Manejo del paquete LINDO en la resolución de casos reales.

CONOCIMIENTOS PREVIOS

Se recomienda haber leído los mathblocks de *Introducción a la Investigación Operativa* y de *Programación Lineal y Programación Lineal Entera con Excel y LINDO*.

CONCEPTOS FUNDAMENTALES

Programación lineal y método simplex:

Una vez se tiene un concepto general de lo que es la programación lineal, es importante conocer la forma de actuación particular de los algoritmos que resuelven programas lineales. De entre todos los algoritmos destaca por su importancia histórica y práctica el método simplex. Dicho método fue desarrollado por Dantzig en 1947, alcanzando un éxito inusitado en las décadas posteriores con el desarrollo de los computadores. El conocimiento básico de dicho método ayuda a la comprensión de las diferentes formas de resolución de programas lineales. Dicho método puede ser estudiado en alguno de los manuales que se presentan a continuación: Hillier y Liebermann (2001) (Capítulos 4 y 5) o bien Winston (1994) (Capítulos 3 y 4). Por otra parte, el estudio de aplicaciones de la Programación Lineal es exhaustivo en los textos de Hillier, Hillier y Liebermann (2000); Eppen et al.(1998); o bien de Anderson, Sweeney y Williams (2001).

Clasificación de las aplicaciones de PL:

La Programación Lineal presenta un gran número de aplicaciones en multitud de ámbitos empresariales, industriales, de gestión y en general, de toma de decisiones. En este mathblock tan sólo se hace una exposición sucinta de las aplicaciones más clásicas. Sin embargo, se aconseja al lector la consulta de los documentos de Internet siguientes:

http://www.fred.ifas.ufl.edu/courses/AEB5516/Lectures/blending.doc
http://dsc.gsu.edu/dscthw/Optimize/LP.PDF

En el primero se describen los problemas clásicos de mezclas y de la dieta, mientras en el segundo se desarrolla un elenco de aplicaciones que sirven muy bien para completar los casos aquí descritos. En otro orden de cosas, en el presente mathblock se van a desarrollar campos de aplicación de la programación lineal en los ámbitos siguientes: Marketing, Producción, Asignación de Tareas, Finanzas, Logística y Mezclas. Esta clasificación no es exhaustiva: existen otros muchos campos de aplicación de la Programación Lineal que aquí no aparecen citados, todos ellos relacionados con tomas de decisiones operativas y tácticas en la gestión empresarial. En algún caso, también aparecen aplicaciones en tomas de decisiones estratégicas.

APLICACIONES DE LA PROGRAMACIÓN LINEAL EN MARKETING

SELECCIÓN DE MEDIOS PUBLICITARIOS

La Programación Lineal se utiliza en el campo del marketing y la publicidad como una herramienta que nos permite determinar cuál es la combinación más efectiva de medios para anunciar nuestros productos. En muchas ocasiones partiremos de un presupuesto para publicidad fijo y nuestro objetivo será distribuirlo entre las distintas opciones que se nos ofrecen (televisión, radio, periódicos, revistas, etc.) de forma que nuestros productos tengan la mayor difusión posible. En otros casos, las restricciones no serán presupuestarias sino que vendrán dadas por la disponibilidad de cada medio y por las políticas publicitarias de nuestra propia empresa.

Supongamos, por ejemplo, que trabajamos para una cadena nacional de bingos, el director de la cual nos otorga un presupuesto de 8.000 € por semana para publicidad. Este dinero debe dedicarse a publicar anuncios en cuatro tipos de medios de difusión: TV, periódicos, y dos emisoras de radio. Nuestro objetivo final no será otro que el de conseguir la mayor audiencia posible. En el cuadro que se muestra a continuación se recoge información referente a la audiencia esperada por anuncio, el coste del mismo, y el nº máximo de anuncios que es posible insertar en cada medio por semana:

MEDIO	AUDIENCIA POR ANUNCIO	COSTE POR ANUNCIO (€)	Nº MÁXIMO POR SEMANA
TV	5.000	800	12
Periódico	8.500	925	5
Radio 1	2.400	290	25
Radio 2	2.800	380	20

Además, los acuerdos contractuales de nuestra empresa requieren la contratación al menos 5 anuncios de radio por semana, aunque la dirección insiste en no dedicar a este medio más de 1.800 € por semana. Usaremos LINDO para plantear y resolver este problema:

```
! SELECCIÓN DE MEDIOS

! X1 = "anuncios en TV por semana"
! X2 = "anuncios en periódico por semana"
! X3 = "anuncios en radio 1 por semana"
! X4 = "anuncios en radio 2 por semana"

MAX      5000 X1 + 8500 X2 + 2400 X3 + 2800 X4

ST
 X1 <= 12
 X2 <=  5
 X3 <= 25
 X4 <= 20

 800 X1 + 925 X2 + 290 X3 + 380 X4 <= 8000

     X3 +      X4 >=    5
 290 X3 + 380 X4 <= 1800

END

GIN 4
```

```
LP OPTIMUM FOUND AT STEP       3
 OBJECTIVE VALUE =    67240.3047

 SET       X1 TO <=     2 AT     1, BND=  0.6699E+05 TWIN= 0.6514E+05      27
 SET       X4 TO <=     0 AT     2, BND=  0.6690E+05 TWIN= 0.6690E+05      31

 NEW INTEGER SOLUTION OF     66900.0000      AT BRANCH       2 PIVOT       31
 BOUND ON OPTIMUM:   66900.00
```

```
DELETE         X4 AT LEVEL      2
DELETE         X1 AT LEVEL      1
ENUMERATION COMPLETE. BRANCHES=      2 PIVOTS=        31

LAST INTEGER SOLUTION IS THE BEST FOUND
RE-INSTALLING BEST SOLUTION...

        OBJECTIVE FUNCTION VALUE

        1)        66900.00

 VARIABLE          VALUE          REDUCED COST
        X1          2.000000       -5000.000000
        X2          5.000000       -8500.000000
        X3          6.000000       -2400.000000
        X4          0.000000       -2800.000000

      ROW    SLACK OR SURPLUS      DUAL PRICES
       2)         10.000000          0.000000
       3)          0.000000          0.000000
       4)         19.000000          0.000000
       5)         20.000000          0.000000
       6)         35.000000          0.000000
       7)          1.000000          0.000000
       8)         60.000000          0.000000

NO. ITERATIONS=        31
BRANCHES=      2 DETERM.=   1.000E    0
```

Por tanto, la forma más efectiva de distribuir nuestro capital en base a las condiciones preestablecidas, será emitiendo dos anuncios semanales en televisión, 5 en el periódico, y 6 en la radio 1. Ello hará que unos 66.900 potenciales compradores conozcan nuestros productos.

ESTUDIOS DE MERCADO

La programación lineal es aplicable también a la investigación de mercados. En el siguiente ejemplo se muestra cómo los estadísticos pueden hacer uso de la Programación Lineal a la hora de diseñar encuestas:

Supongamos que pretendemos realizar una encuesta para determinar la opinión de los españoles acerca del problema de la inmigración. A fin de que la misma sea significativa desde un punto de vista estadístico, exigiremos que ésta deba cumplir los siguientes requisitos:

1. *Entrevistar al menos un total de 2.300 familias españolas.*
2. *De las familias entrevistadas, al menos 1.000 deben cumplir que su cabeza de familia no supere los 30 años de edad.*
3. *Al menos 600 de las familias entrevistadas tendrán un cabeza de familia con edad comprendida entre los 31 y los 50 años.*
4. *El porcentaje de entrevistados que pertenecen a zonas con elevada tasa de inmigración no debe ser inferior a un 15% del total.*
5. *Finalmente, no más de un 20% de los entrevistados mayores de 50 años pertenecerán a zonas con alta tasa de inmigración.*

Además, todas las encuestas deberán realizarse en persona. A continuación indicamos el coste estimado de cada encuesta según la edad del encuestado y si procede o no de una zona con una alta tasa de inmigración:

ZONA	EDAD < 31 AÑOS	EDAD 31-50	EDAD > 50
Tasa de inmig. elevada	7.50 €	6.80 €	5.50 €
Tasa de inmig. baja	6.90 €	7.25 €	6.10 €

Obviamente, nuestro objetivo será cumplir todos los requisitos anteriores minimizando el coste:

```
! ESTUDIO DE MERCADO - ENCUESTA

! I3 = "nº encuestados de edad <= 30 y que viven en zonas de mucha inmigración"
! I4 = "nº encuestados de edad entre 31-50 que viven en zonas de mucha inmigración"
! I5 = "nº encuestados de edad > 50 que viven en zonas de mucha inmigración"

! N3 = "nº encuestados de edad <= 30 y que NO viven en zonas de mucha inmigración"
! N4 = "nº encuestados de edad entre 31-50 que NO viven en zonas de mucha inmigración"
! N5 = "nº encuestados de edad > 50 que NO viven en zonas de mucha inmigración"


MIN      7.50 I3 + 6.80 I4 + 5.50 I5 + 6.90 N3 + 7.25 N4 +6.10 N5


ST
                   I3 + I4 + I5 + N3 + N4 + N5 >= 2300
                   I3 +           N3           >= 1000
                        I4 +           N4      >=  600

  I3 + I4 + I5 - .15 I3 - .15 I4 - .15 I5 - .15 N3 -.15 N4 - .15 N5 >= 0

                        I5 - .2 I5 - .2 N5 <= 0


END

GIN 6
```

```
LP OPTIMUM FOUND AT STEP      4
 OBJECTIVE VALUE =    15166.0000

 FIX ALL VARS.(     2)  WITH RC >  0.000000E+00

 NEW INTEGER SOLUTION OF    15166.0000     AT BRANCH      0 PIVOT       4
 BOUND ON OPTIMUM:  15166.00
 ENUMERATION COMPLETE. BRANCHES=     0 PIVOTS=       4

 LAST INTEGER SOLUTION IS THE BEST FOUND
 RE-INSTALLING BEST SOLUTION...

        OBJECTIVE FUNCTION VALUE

        1)       15166.00

  VARIABLE        VALUE          REDUCED COST
        I3         0.000000          7.500000
        I4       600.000000          6.800000
        I5       140.000000          5.500000
        N3      1000.000000          6.900000
        N4         0.000000          7.250000
        N5       560.000000          6.100000


       ROW   SLACK OR SURPLUS     DUAL PRICES
        2)         0.000000          0.000000
        3)         0.000000          0.000000
        4)         0.000000          0.000000
        5)       395.000000          0.000000
        6)         0.000000          0.000000

 NO. ITERATIONS=       4
 BRANCHES=    0 DETERM.=  1.000E    0
```

Así pues, deberíamos realizar la encuesta exclusivamente a 600 individuos del tipo I4, a 140 del tipo I5, a 1.000 del tipo N3 y a 560 del tipo N5. Ello supondría unos costes estimados de 15.166 €.

APLICACIONES DE LA PROGRAMACIÓN LINEAL EN PRODUCCIÓN

COMBINACIÓN ÓPTIMA DE BIENES

A menudo las técnicas de PL permiten decidir sobre la cantidad más adecuada que una empresa debe producir de cada uno de sus productos a fin maximizar los beneficios sin dejar de cumplir con unos determinados requisitos (financieros, de demanda, contractuales, de disponibilidad de materias primas, etc.).

Una empresa dedicada a la elaboración y venta de ropa para hombre produce cuatro tipos de corbatas, una de seda, otra de poliester, y dos de poliester/algodón. La tabla siguiente muestra el coste de cada uno de estos materiales y su disponibilidad:

MATERIAL	COSTE POR METRO (€)	METROS DISPONIBLES / MES
Seda	21	800
Poliester	6	3.000
Algodón	9	1.600

La empresa tiene contratos de larga duración para suministrar corbatas a cinco cadenas de tiendas de ropa. En dichos contratos se especifica que la empresa deberá suministrar unas cantidades mínimas mensuales de cada tipo de corbata y, que en caso de recibir una demanda superior al mínimo, será la propia empresa la que decida si puede o no servir la cantidad extra solicitada. A continuación aparecen los datos relevantes:

TIPO DE CORBATA	PRECIO DE VENTA (€)	MÍNIMO A SERVIR	DEMANDA MENSUAL	METROS NECESARIOS	COMPOSICIÓN
Seda	6.70	6.000	7.000	0.125	100% seda
Poliester	3.55	10.000	14.000	0.08	100% poliester
Algodón # 1	4.31	13.000	16.000	0.10	50% poliester 50% algodón
Algodón # 2	4.81	6.000	8.500	0.10	30% poliester 70% algodón

El objetivo de la empresa es elegir el plan de producción que maximice sus beneficios mensuales.

Lo primero en este problema será determinar qué beneficios nos reporta cada una de las corbatas vendidas y fabricadas. Así por ejemplo, cada corbata de seda requiere de 0.125 metros de este material, a un coste de 21 € por metro, lo que nos da un coste por corbata de 2.62 €. Como la vendemos por 6.70 €, el beneficio que obtenemos será de 4.08 € por cada unidad producida y vendida. El mismo razonamiento se aplicará a los restantes tres tipos de corbata, con lo que obtendremos el siguiente planteamiento:

```
! COMBINACIÓN DE BIENES A PRODUCIR

! S = "N° corbatas de seda a producir"
! P = "N° corbatas de poliester a producir"
! A1 = "N° corbatas de algodón #1 a producir"
! A2 = "N° corbatas de algodón #2 a producir"

MAX    4.08 S + 3.07 P + 3.56 A1 + 4.00 A2

ST
            .125 S                          <=  800
                     .08 P + .05 A1 + .03 A2 <= 3000
                             .05 A1 + .07 A2 <= 1600

                                S >=  6000
                                S <=  7000
                                P >= 10000
                                P <= 14000
                               A1 >= 13000
                               A1 <= 16000
```

```
                              A2 >=  6000
                              A2 <=  8500

    END

    GIN 4
```

Observar que la solución a nuestro caso será producir cada mes 6.400 corbatas de seda, 14.000 de poliéster, 16.000 de algodón #1, y 8.500 de algodón #2. Ello nos dará unos beneficios de 160.052 € por mes.

```
LP OPTIMUM FOUND AT STEP       2
OBJECTIVE VALUE =    160052.000


NEW INTEGER SOLUTION OF     160052.000      AT BRANCH       0 PIVOT       2
BOUND ON OPTIMUM:  160052.0
ENUMERATION COMPLETE. BRANCHES=      0 PIVOTS=       2

LAST INTEGER SOLUTION IS THE BEST FOUND
RE-INSTALLING BEST SOLUTION...

       OBJECTIVE FUNCTION VALUE

       1)       160052.0

 VARIABLE        VALUE          REDUCED COST
        S      6400.000000         -4.080000
        P     14000.000000         -3.070000
       A1     16000.000000         -3.560000
       A2      8500.000000         -4.000000


      ROW   SLACK OR SURPLUS     DUAL PRICES
       2)         0.000000          0.000000
       3)       825.000000          0.000000
       4)       204.999985          0.000000
       5)       400.000000          0.000000
       6)       600.000000          0.000000
       7)      4000.000000          0.000000
       8)         0.000000          0.000000
       9)      3000.000000          0.000000
      10)         0.000000          0.000000
      11)      2500.000000          0.000000
      12)         0.000000          0.000000

NO. ITERATIONS=       2
BRANCHES=     0 DETERM.=  1.000E    0
```

PLANIFICACIÓN DE LA PRODUCCIÓN

El establecer un plan de producción para un período de semanas o meses resulta ser una tarea difícil e importante en la mayoría de las plantas de producción. El director de operaciones debe considerar muchos factores: mano de obra, costes de inventario y almacenamiento, limitaciones de espacio, demanda, etc. Por lo general la mayoría de las plantas producen más de un bien, con lo que la tarea anterior se complica aún más. Como veremos en el siguiente ejemplo, el problema de la planificación se asemeja bastante al de la combinación óptima de bienes, pudiendo ser el objetivo maximizar beneficios o bien minimizar los costes de producción más almacenamiento.

La empresa Motores de Almazora, S.A. fabrica dos tipos de motores eléctricos los cuales vende a la compañía Electrodomésticos Villareal, S.A. Tres veces al año, el director de compras de esta última empresa envía a la primera un pedido que abarca los siguientes cuatro meses. A

continuación se muestra una tabla con el pedido para el período enero-abril para cada modelo de motor:

MODELO	ENERO	FEBRERO	MARZO	ABRIL
ME3A	800	700	1.000	1.100
ME3B	1.000	1.200	1.400	1.400

La planificación de la producción en Motores de Almazora, S.A. debe considerar cuatro factores:

1. *El deseo de producir el mismo nº de motores cada mes. Esto simplificaría la planificación y los horarios de trabajadores y máquinas.*
2. *La necesidad de mantener lo más bajo posible los costes de estucos. Esto sugiere que en cada mes se ha de ajustar la producción a lo estrictamente requerido en el mismo.*
3. *Limitaciones de almacenes, las cuales son de 3.300 unidades máximo de cada tipo.*
4. *La política de no despidos de la compañía, la cual garantiza que un mínimo de la capacidad productiva estará en activo cada mes. Concretamente se asegura un nivel no inferior a las 2.240 horas mensuales de mano de obra, pudiéndose ampliar tal recurso hasta las 2.560 horas mensuales si fuese necesario.*

Deberemos tener en cuenta que los costes de producción son de 10 € por unidad de ME3A y de 6 € por unidad de ME3B, si bien debido a un acuerdo con los sindicatos, éstos costes se incrementarán en un 10% a partir del 1 de marzo. Además, cada motor de tipo ME3A que permanezca en estoc supone un coste de 0.18 € por mes, mientras que almacenar uno de tipo ME3B genera un coste de 0.13 € mensuales.

Por otro lado, se desea tener un inventario de seguridad de 450 ME3A y 300 ME3B a finales de abril. Indicar finalmente que cada ME3A requerirá de 1.3 horas de mano de obra, mientras que cada ME3B necesita de 0.9 horas.

```
TITLE PLAN DE PRODUCCIÓN

! XAi = "nº de ME3A producidos durante el mes i"   i=1,2,3,4
! XBi = "nº de ME3B producidos durante el mes i"

! IAi = "nº de ME3A en inventario al final del mes i"
! IBi = "nº de ME3B en inventario al final del mes i"

MIN  10XA1 + 10XA2 + 11XA3 + 11XA4 + 6XB1 + 6XB2 + 6.6XB3 + 6.6XB4 +

   .18IA1 + .18IA2 + .18IA3 + .18IA4 + .13IB1 + .13IB2 + .13IB3 + .13IB4

               ! costes de producción y costes de inventario

ST
           XA1 - IA1 =  800 ! demanda de enero
           XB1 - IB1 = 1000

           XA2 + IA1 - IA2 =  700! demanda de febrero
           XB2 + IB1 - IB2 = 1200

           XA3 + IA2 - IA3 = 1000! demanda de marzo
           XB3 + IB2 - IB3 = 1400

           XA4 + IA3 - IA4 = 1100! demanda de abril
           XB4 + IB3 - IB4 = 1400

           IA4 = 450
           IB4 = 300

           IA1 + IB1 <= 3300
           IA2 + IB2 <= 3300
           IA3 + IB3 <= 3300
```

```
            IA4 + IB4 <= 3300
            1.3XA1 + .9XB1 >= 2240! mínimo uso de mano de obra en enero
            1.3XA1 + .9XB1 <= 2560

            1.3XA2 + .9XB2 >= 2240! mínimo uso de mano de obra en febrero
            1.3XA2 + .9XB2 <= 2560

            1.3XA3 + .9XB3 >= 2240! mínimo uso de mano de obra en marzo
            1.3XA3 + .9XB3 <= 2560

            1.3XA4 + .9XB4 >= 2240! mínimo uso de mano de obra en abril
            1.3XA4 + .9XB4 <= 2560

END

GIN 16
```

El ejemplo anterior nos muestra la elaboración de un plan de producción relativamente sencillo ya que sólo se consideran dos productos. Sin embargo, el mismo procedimiento usado aquí es aplicable a planes de producción con decenas de productos y centenares de restricciones.

```
LP OPTIMUM FOUND AT STEP      13
 OBJECTIVE VALUE =    76301.6172

 SET      XA2 TO <=  1138 AT     1, BND= -0.7630E+05 TWIN=-0.7630E+05      48
 SET      IB2 TO <=     0 AT     2, BND= -0.7630E+05 TWIN=-0.7630E+05      51
 SET      IA1 TO <=   476 AT     3, BND= -0.7630E+05 TWIN=-0.1000E+31      55
 SET      IB3 TO >=     2 AT     4, BND= -0.7630E+05 TWIN=-0.7630E+05      58
 SET      IA3 TO >=   757 AT     5, BND= -0.7630E+05 TWIN=-0.7630E+05      65

 NEW INTEGER SOLUTION OF     76302.7188      AT BRANCH       5 PIVOT       65
 BOUND ON OPTIMUM:  76301.62
 FLIP       IA3 TO <=        756 AT     5 WITH BND=    -76302.602
 SET      XA2 TO >=  1138 AT     6, BND= -0.7630E+05 TWIN=-0.1000E+31      65
 SET      IA1 TO >=   476 AT     7, BND= -0.7630E+05 TWIN=-0.1000E+31      65
 SET      IB1 TO <=     0 AT     8, BND= -0.7630E+05 TWIN=-0.1000E+31      65
 SET      IB3 TO >=     3 AT     9, BND= -0.7630E+05 TWIN=-0.1000E+31      66
 SET      IA3 TO >=   756 AT    10, BND= -0.7630E+05 TWIN=-0.7630E+05      68

 ...                  ...                         ...
 ...                         ...                          ...


OBJECTIVE FUNCTION VALUE

        1)       76301.87

  VARIABLE        VALUE          REDUCED COST
       XA1       1270.000000        10.000000
       XA2       1144.000000        10.000000
       XA3        843.000000        11.000000
       XA4        793.000000        11.000000
       XB1       1010.000000         6.000000
       XB2       1192.000000         6.000000
       XB3       1399.000000         6.600000
       XB4       1699.000000         6.600000
       IA1        470.000000         0.180000
       IA2        914.000000         0.180000
       IA3        757.000000         0.180000
       IA4        450.000000         0.180000
       IB1         10.000000         0.130000
       IB2          2.000000         0.130000
       IB3          1.000000         0.130000
       IB4        300.000000         0.130000


       ROW   SLACK OR SURPLUS     DUAL PRICES
        2)         0.000000         0.000000
        3)         0.000000         0.000000
```

```
        4)         0.000000          0.000000
        5)         0.000000          0.000000
        6)         0.000000          0.000000
        7)         0.000000          0.000000
        8)         0.000000          0.000000
        9)         0.000000          0.000000
       10)         0.000000          0.000000
       11)         0.000000          0.000000
       12)      2820.000000          0.000000
       13)      2384.000000          0.000000
       14)      2542.000000          0.000000
       15)      2550.000000          0.000000
       16)       319.999908          0.000000
       17)         0.000085          0.000000
       18)       319.999908          0.000000
       19)         0.000083          0.000000
       20)       114.999924          0.000000
       21)       205.000076          0.000000
       22)       319.999908          0.000000
       23)         0.000078          0.000000

 NO. ITERATIONS=     245
 BRANCHES=   62 DETERM.=  1.000E    0
```

APLICACIONES DE LA PROGRAMACIÓN LINEAL A LA DISTRIBUCIÓN DE TAREAS

ASIGNACIÓN DE TRABAJOS

El objetivo aquí será asignar de la forma más eficiente posible un trabajo a cada empleado o máquina. Ejemplos de este tipo de asignación serían la distribución de coches patrulla por las calles de una ciudad o la destino de cada jefe de ventas a una determinada zona geográfica. El objetivo puede ser bien minimizar los tiempos o costes de desplazamiento, o bien maximizar la efectividad de las asignaciones.

Aparte de poder utilizar los algoritmos tradicionales (Simplex y Karmarkar), este tipo de problemas también puede resolverse usando técnicas especialmente diseñadas para sus características como el método húngaro, el cual necesita de menos iteraciones para dar con la solución.

Una propiedad particular de los problemas de asignación es que tanto los coeficientes tecnológicos cómo los términos independientes (*right-hand-side*) siempre toman el valor 1. Además, todas las variables serán binarias, tomando el valor 1 si la asignación propuesta se lleva a cabo y 0 en caso contrario.

Veamos un ejemplo:

Un gabinete de abogados tiene en su nómina cuatro hábiles licenciados en derecho a los cuales quiere utilizar de forma óptima asignando a cada uno el caso que más se ajuste a sus características. El 1 de marzo llegan a la compañía cuatro clientes en busca de asesoramiento, y el director del gabinete decide asignar cada caso a cada uno de sus cuatro empleados según sus especialidades y preferencias.

A continuación se muestra una tabla donde se estima la efectividad (valorada en una escala del 1 al 9) de cada trabajador para cada uno de los casos que presentan los clientes:

ABOGADO	DIVORCIO	FUSIÓN EMPRESAS	ABSORCIÓN EMPRESAS	EXHIBICIONISMO
A1	6	2	8	5

A2	9	3	5	8
A3	4	8	3	4
A4	6	7	6	4

Para resolver esta situación, consideraremos las variables Xij, donde i = 1, 2, 3, 4 según abogado, y j = 1, 2, 3, 4 según caso. Así, la variable Xij tomará el valor 1 si el abogado i es asignado al caso j, y 0 en caso contrario.

```
TITLE    DESPACHO DE ABOGADOS

MAX     6X11 + 2X12 + 8X13 + 5X14 + 9X21 + 3X22 + 5X23 + 8X24 +
        4X31 + 8X32 + 3X33 + 4X34 + 6X41 + 7X42 + 6X43 + 4X44

        ! Maximizamos la efectividad total

ST
                X11 + X21 + X31 + X41 = 1          ! Caso divorcio
                X12 + X22 + X32 + X42 = 1          ! Caso fusión
                X13 + X23 + X33 + X43 = 1          ! Caso absorción
                X14 + X24 + X34 + X44 = 1          ! Caso exhibicionismo

                X11 + X12 + X13 + X14 = 1          ! Abogado 1
                X21 + X22 + X23 + X24 = 1          ! Abogado 2
                X31 + X32 + X33 + X34 = 1          ! Abogado 3
                X41 + X42 + X43 + X44 = 1          ! Abogado 4

END

INT 16 ! Todas las variables son binarias
```

```
LP OPTIMUM FOUND AT STEP      14
 OBJECTIVE VALUE =    30.0000000

 FIX ALL VARS.(     9)  WITH RC >    1.00000

 NEW INTEGER SOLUTION OF    30.0000000     AT BRANCH      0 PIVOT      14
 BOUND ON OPTIMUM:  30.00000
 ENUMERATION COMPLETE. BRANCHES=     0 PIVOTS=      14

 LAST INTEGER SOLUTION IS THE BEST FOUND
 RE-INSTALLING BEST SOLUTION...

        OBJECTIVE FUNCTION VALUE

        1)      30.00000

  VARIABLE        VALUE          REDUCED COST
       X11         0.000000         -6.000000
       X12         0.000000         -2.000000
       X13         1.000000         -8.000000
       X14         0.000000         -5.000000
       X21         0.000000         -9.000000
       X22         0.000000         -3.000000
       X23         0.000000         -5.000000
       X24         1.000000         -8.000000
       X31         0.000000         -4.000000
       X32         1.000000         -8.000000
       X33         0.000000         -3.000000
       X34         0.000000         -4.000000
       X41         1.000000         -6.000000
       X42         0.000000         -7.000000
       X43         0.000000         -6.000000
       X44         0.000000         -4.000000

       ROW   SLACK OR SURPLUS     DUAL PRICES
        2)         0.000000          0.000000
```

```
        3)          0.000000          0.000000
        4)          0.000000          0.000000
        5)          0.000000          0.000000
        6)          0.000000          0.000000
        7)          0.000000          0.000000
        8)          0.000000          0.000000
        9)          0.000000          0.000000

NO. ITERATIONS=       14
BRANCHES=     0 DETERM.=  1.000E     0
```

Queda claro pues que el abogado 1 se ocupará del caso de absorción empresarial, el abogado 2 del caso de exhibicionismo, el abogado 3 del caso de la fusión, y el abogado 4 del divorcio.

PLANIFICACIÓN DE HORARIOS

La planificación de horarios intenta dar una respuesta efectiva a las necesidades de personal durante un período concreto de tiempo. La aplicación de la PL a este tipo de problemas resulta especialmente útil cuando los directivos disponen de cierta flexibilidad a la hora de asignar tareas a empleados polifuncionales. Un sector típico donde se hace uso de la PL para tomar decisiones sobre planificación de horarios son las entidades bancarias.

Supongamos que una oficina bancaria necesita diariamente entre 10 y 18 cajeros en función de la hora según se especifica en la tabla siguiente:

FRANJA HORARIA	Nº DE CAJEROS NECESARIOS
9 a.m. – 10 a.m.	10
10 a.m. – 11 a.m.	12
11 a.m. – 12 a.m.	14
12 a.m. – 1 p.m.	16
1 p.m. – 2 p.m.	18
2 p.m. – 3 p.m.	17
3 p.m. – 4 p.m.	15
4 p.m. – 5 p.m.	10

En la actualidad la oficina tiene 12 trabajadores a jornada completa ("full-time"), y dispone de una larga lista de gente dispuesta a trabajar a media jornada ("part-time"). Un cajero que trabaje a media jornada ha de estar operativo 4 horas al día, y estar disponible para comenzar su trabajo a cualquier hora entre las 9 a.m. y la 1 p.m. Por su parte, los trabajadores a jornada completa están operativos de 9 a.m. a 5 p.m., teniendo libre una hora para comer (la mitad de ellos lo harán de 11 a.m. a 12 a.m. y la otra mitad de 12 a.m. a 1 p.m.). Observar que cada uno de estos cajeros tiene una jornada semanal de 35 horas.

Las normas de la entidad limitan el número de horas realizadas por los "part-time" a, como máximo, el 50% de las horas diarias requeridas. Los "part-time" ganan una media de 4 € la hora (es decir, 16 € al día), por 50 € diarios que ganan los "full-time". El banco pretende establecer un horario que minimice sus costes salariales, estando dispuesto a desprenderse de algún trabajador "full-time" si ello resulta conveniente.

```
TITLE  HORARIOS BANCO

!  F = "nº trabajadores full-time"
!  P1 = "nº trabajadores part-time operativos de  9 a.m. a 1 p.m."
!  P2 = "nº trabajadores part-time operativos de 10 a.m. a 2 p.m."
!  P3 = "nº trabajadores part-time operativos de 11 a.m. a 3 p.m."
```

```
! P4 = "nº trabajadores part-time operativos de 12 a.m. a 4 p.m."
! P5 = "nº trabajadores part-time operativos de  1 p.m. a 5 p.m."

MIN  50 F + 16 P1 + 16 P2 + 16 P3 + 16 P4 + 16 P5

     ! Queremos minimizar los costes salariales

ST
      F + P1                        >= 10    ! Necesidades de 9 a.m. a 10 a.m.
      F + P1 + P2                   >= 12
    .5F + P1 + P2 + P3              >= 14
    .5F + P1 + P2 + P3 + P4         >= 16
      F      + P2 + P3 + P4 + P5    >= 18
      F           + P3 + P4 + P5    >= 17
      F                + P4 + P5    >= 15
      F                     + P5    >= 10

      F <= 12

      4P1 + 4P2 + 4P3 + 4P4 + 4P5 <= 56

      ! Los part-time harán a lo sumo el 50% de las horas

END

GIN 6
```

```
LP OPTIMUM FOUND AT STEP       8
 OBJECTIVE VALUE =    724.000000

        OBJECTIVE FUNCTION VALUE
        1)       724.0000

  VARIABLE         VALUE          REDUCED COST
         F        10.000000         50.000000
        P1         0.000000         16.000000
        P2         2.000000         16.000000
        P3         7.000000         16.000000
        P4         5.000000         16.000000
        P5         0.000000         16.000000

       ROW   SLACK OR SURPLUS     DUAL PRICES
        2)         0.000000         0.000000
        3)         0.000000         0.000000
        4)         0.000000         0.000000
        5)         3.000000         0.000000
        6)         6.000000         0.000000
        7)         5.000000         0.000000
        8)         0.000000         0.000000
        9)         0.000000         0.000000
       10)         2.000000         0.000000
       11)         0.000000         0.000000

 NO. ITERATIONS=       8
 BRANCHES=     0 DETERM.=  1.000E    0
```

APLICACIONES DE LA PROGRAMACIÓN LINEAL A LAS FINANZAS

SELECCIÓN DE UNA CARTERA DE VALORES

Un problema al que se tienen que enfrentar de forma habitual los directivos de bancos, fondos de inversión, y compañías de seguros es la selección de una serie de inversiones concretas de entre la gran variedad de alternativas existentes en el mercado. Por norma general, el objetivo de estos directivos es maximizar los beneficios esperados de estas inversiones, las cuales se ven sometidas a un conjunto de restricciones, algunas legales y otras provenientes de la propia empresa (como puede ser el nivel de riesgo que se desea asumir o la cantidad máxima que se permite invertir).

Supongamos que nuestro banco se dedica a invertir en créditos al consumo, bonos corporativos, depósitos de oro, y préstamos a la construcción. Con el fin de diversificar la cartera de valores, la Junta Directiva del banco ha puesto límite a las cantidades que se permiten invertir en cada una de las opciones anteriores. En la actualidad disponemos de 5 millones de € para invertir, y pretendemos: (1) Maximizar el interés esperado para los próximos seis meses, y (2) cumplir con la diversificación propugnada por la Junta Directiva según se especifica en la tabla siguiente:

TIPO DE INVERSIÓN	INTERÉS ESPERADO	LÍMITE DE INVERSIÓN (MILLONES DE €)
Crédito al consumo	7%	1.0
Bonos corporativos	11%	2.5
Depósitos de oro	19%	1.5
Préstamos a la construcción	15%	1.8

Además, la Directiva requiere que al menos un 5% de los fondos se dediquen a depósitos de oro y préstamos a la construcción, mientras que el porcentaje dedicado a créditos al consumo no debe superar el 15%.

```
TITLE  SELECCIÓN DE UNA CARTERA

! X1 = "Cantidad invertida en créditos al consumo"
! X2 = "Cantidad invertida en bonos corporativos"
! X3 = "Cantidad invertida en depósitos de oro"
! X4 = "Cantidad invertida en préstamos a la construcción"

MAX   .07 X1 + .11 X2 + .19 X3 + .15 X4
ST
      X1 <= 1000000
      X2 <= 2500000
      X3 <= 1500000
      X4 <= 1800000
      X3 + X4 - .55X1 - .55X2 - .55X3 - .55X4 >= 0
      X1 - .15X1 - .15X2 - .15X3 - .15X4 >= 0
      X1 + X2 + X3 + X4 <= 5000000

END
```

```
LP OPTIMUM FOUND AT STEP       4

        OBJECTIVE FUNCTION VALUE
        1)       712000.0

  VARIABLE         VALUE          REDUCED COST
        X1     750000.000000         0.000000
        X2     950000.000000         0.000000
        X3    1500000.000000         0.000000
        X4    1800000.000000         0.000000

       ROW   SLACK OR SURPLUS     DUAL PRICES
        2)     250000.000000         0.000000
        3)    1550000.000000         0.000000
        4)          0.000000         0.080000
        5)          0.000000         0.040000
        6)     550000.000000         0.000000
        7)          0.000000        -0.040000
        8)          0.000000         0.104000

 NO. ITERATIONS=       4
```

APLICACIONES DE LA PROGRAMACIÓN LINEAL A LA LOGÍSTICA

El PROBLEMA DEL TRANSPORTE

El llamado problema del transporte se refiere al proceso de determinar el número de bienes o mercancías que se han de transportar desde cada uno de los orígenes a cada uno de los destinos posibles. El objetivo suele ser minimizar costes de transporte, y las restricciones vienen dadas por las capacidades productivas de cada origen y las necesidades de cada destino. Este tipo de problema es un caso específico de PL, por lo que existen métodos y algoritmos especiales que facilitan su resolución (Regla de la Esquina NorOeste, Método de Vogel, Método de Paso Secuencial, y Método de distribución modificada o MODI).

Una compañía de ámbito nacional produce y distribuye una línea de bicicletas de alta competición. La empresa tiene líneas de montaje en dos ciudades, Castellón y Sabadell, mientras que sus tres principales cadenas de distribución están localizadas en Madrid, Barcelona, y Vitoria.

La oficina de Madrid presenta una demanda anual de 10.000 bicicletas, mientras que la de Barcelona solicita 8.000 y la de Vitoria 15.000. La planta de Castellón puede producir hasta 20.000 bicicletas anuales, por 15.000 la de Sabadell. Los costes de transporte por unidad son los siguientes:

	DESTINO		
ORIGEN	Madrid	Barcelona	Vitoria
Castellón	2 €	3 €	5 €
Sabadell	3 €	1 €	4 €

La compañía pretende establecer un plan de distribución que minimice sus costes anuales de transporte.

```
TITLE   EL PROBLEMA DEL TRANSPORTE

! CM = "nº bicicletas a transportar desde Castellón hasta Madrid"
! CB = "nº     "            "            "      "         "  Barcelona"
! CV = "nº     "            "            "      "         "  Vitoria"
! SM = "nº     "            "            "   Sabadell     "  Madrid"
! SB = "nº     "            "            "      "         "  Barcelona"
! SV = "nº     "            "            "      "         "  Vitoria"
```

```
MIN  2 CM + 3 CB + 5 CV + 3 SM + 1 SB + 4 SV
ST
     CM + SM = 10000
     CB + SB =  8000
     CV + SV = 15000

     CM + CB + CV <= 20000
     SM + SB + SV <= 15000
END
GIN 6
```

```
LP OPTIMUM FOUND AT STEP       2
 OBJECTIVE VALUE =    96000.0000

        OBJECTIVE FUNCTION VALUE
        1)        96000.00

  VARIABLE          VALUE          REDUCED COST
        CM      10000.000000          2.000000
        CB          0.000000          3.000000
        CV       8000.000000          5.000000
        SM          0.000000          3.000000
        SB       8000.000000          1.000000
        SV       7000.000000          4.000000

       ROW    SLACK OR SURPLUS     DUAL PRICES
        2)         0.000000         0.000000
        3)         0.000000         0.000000
        4)         0.000000         0.000000
        5)      2000.000000         0.000000
        6)         0.000000         0.000000

 NO. ITERATIONS=         2
 BRANCHES=      0 DETERM.=   1.000E    0
```

APLICACIONES DE LA PROGRAMACIÓN LINEAL A MEZCLAS

El PROBLEMA DE LA DIETA

Este problema representa una de las primeras aplicaciones de la PL, y comenzó a utilizarse en los hospitales para determinar la dieta más económica con la que alimentar a los pacientes a partir de unas especificaciones nutritivas mínimas. En la actualidad también se aplica con éxito en el ámbito agrícola con la misma idea de encontrar la combinación óptima de alimentos que, logrando un aporte nutritivo mínimo, suponga el menor coste posible.

Un centro de nutrición utiliza tres tipos de granos para elaborar un cereal natural que vende por kilos. El eslogan del centro es que cada 125 gramos de su cereal, tomados con medio vaso de leche entera, cubre las necesidades alimenticias de un adulto en cuanto a proteínas, hidratos de carbono, fósforo y magnesio. El coste de cada tipo de grano y sus contenidos por kg. se reflejan en la siguiente tabla:

GRANO	COSTE POR KG.	PROTEINAS (unidades/kg)	HIDRATOS C (unidades/kg.)	FÓSFORO (unidades/kg)	MAGNESIO (unidades/kg)
A	0.33 €	22	16	8	5
B	0.47 €	28	14	7	0
C	0.38 €	21	25	9	6

Los requisitos nutricionales mínimos por día para un adulto son 3 unidades de proteínas, 2 de hidratos de carbono, 1 de fósforo, y 0.425 de magnesio. Se tratará pues de establecer la mezcla adecuada de granos que logra cubrir estas necesidades con el mínimo coste para el centro.

```
TITLE PROBLEMA DE LA DIETA

!  XA = "kgs. grano tipo A que usaremos en 125 gramos de cereal"
!  XB = "kgs.   "     "  B        "         "     "     cereal"
!  XC = "kgs.   "     "  C        "         "     "     cereal"

MIN  .33 XA + .47 XB + .38 XC

ST
     22 XA + 28 XB + 21 XC >= 3
     16 XA + 14 XB + 25 XC >= 2
      8 XA +  7 XB +  9 XC >= 1
      5 XA         +  6 XC >=  .425

        XA +    XB +    XC =   .125

END
```

```
LP OPTIMUM FOUND AT STEP      3

        OBJECTIVE FUNCTION VALUE

        1)      0.5075001E-01

  VARIABLE         VALUE          REDUCED COST
        XA          0.025000          0.000000
        XB          0.050000          0.000000
        XC          0.050000          0.000000


       ROW   SLACK OR SURPLUS     DUAL PRICES
        2)          0.000000         -0.390000
        3)          0.350001          0.000000
        4)          0.000000          0.000000
        5)          0.000000         -0.440000
        6)          0.000000         10.450000

 NO. ITERATIONS=       3
```

Queda claro pues que la solución ideal será usar 25 gramos de grano tipo A, 50 de grano tipo B y otros 50 de grano tipo C. Con ello logramos cumplir con nuestro eslogan al menor coste posible.

BIBLIOGRAFÍA

1) Anderson, D.R., Sweeney, D. J. y Williams, T.A. (2001): *Quantitative Methods for Business.* West Publishing Company. (Existe versión en español).
2) Anderson, D.R., Sweeney, D. J. y Williams, T.A. (2000): *An Introduction to Management Science. Quantitative Approach to Decision Making.* West Publishing Company. (Existe versión en español)
3) Anderson, D.R., Sweeney, D. J. y Williams, T.A. (1999): *Contemporary Management Science with Spreadsheets.* International Thomson Publishing Company.
4) Camm, J. y Evans, J.R. (2000): *Management Science and Decision Technology.* South Western College Publishing.

5) Eppen, G.D., Gould, F.J., Schmidt, C.P., Moore, J.H., Weatherford, L.R. (1998): *Introductory Management Science. Decision Modeling with Spreadsheets*. Upper Saddle River. (Existe versión en español)

6) Hillier, F.S. y Liebermann, G.J. (2001): *Introducción a la Investigación de Operaciones*. Ed. McGraw-Hill.

7) Hillier, F.S., Hillier, M.S. y Liebermann, G.J. (2000): *Introduction to Management Science. A Modeling and Case Studies Approach with Spreadsheets*. Irwin-McGraw-Hill.

8) Lawrence, A.L. y Pasternack, B.A. (1998): *Applied Management Science. A Computer Integrated Approach for Decision Making*. Ed. Wiley.

9) Moore, L.J., Lee, S.M. y Taylor, B.W. (1993): *Management Science*. Allyn and Bacon.

10) Taha, H.A. (1997): *Operations Research. An Introduction*. McMillan Publishing Company. (Existe versión en español)

11) Winston, W. (1994): *Investigación de Operaciones. Aplicaciones y Algoritmos*. Grupo Editorial Iberoamericano.

12) Winston, W. y Albright, S. C. (1997): *Practical Management Science. Spreadsheet Modeling and Applications*. Duxbury Press.

ENLACES

- http://www-fp.mcs.anl.gov/otc/Guide/CaseStudies/
  Página web de ejemplos de aplicación de programación matemática.
- http://www.statslab.cam.ac.uk/~rrw1/opt/diet_history.html
  Historia del problema de la dieta.
- http://www.e-optimization.com/directory/trailblazers/dantzig/interview_dietg.cfm
  Cómo George Dantzig resolvió el problema de la dieta.
- http://www.maths.abdn.ac.uk/~igc/tch/index/mx3503/notes/node14.html
  Curso básico de Programación Lineal y temas afines de la Universidad de Aberdeen.
- http://www.fred.ifas.ufl.edu/courses/AEB5516/Lectures/blending.doc
  Ejemplos de mezclas y de dietas resueltos con Programación Lineal.
- http://dsc.gsu.edu/dscthw/Optimize/LP.PDF
  Artículo de 65 páginas con ejemplos clásicos de aplicación de la Programación Lineal.
- http://www.pitt.edu/~jrclass/or/or-intro.doc
  Artículo introductorio a la Investigación Operativa y sus aplicaciones.
- http://www.kem.ae.poznan.pl/Books/Excel-Solver/T1/T1.htm
  Tutorial sobre optimización con Excel-Solver.
- http://www.faqs.org/faqs/linear-programming-faq/
  Web dedicada a preguntas más comunes acerca de Programación Lineal.
- http://carbon.cudenver.edu/~hgreenbe/courseware/LPshort/intro.html
  Se trata de un curso breve de Programación Lineal.

$\max\ 40x_1 + 30x_2 + 25x_3 + 30x_4$

$4x_1 + 1'5x_2 + 3x_3 + 1'8x_4 \le 800$

$1'5x_1 + 1x_2 + 2x_3 + 0'8x_4 < 400$

$2x_1 + 1.2x_2 + 1.5x_3 + 0.8x_4 < 400$

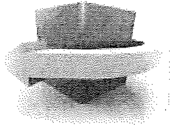
$x_2 > 90$

$x_3 > 50$

Bienvenido a ProgramaciónLineal.net un sitio enfocado exclusivamente a los contenidos de esta importante área de la Investigación de Operaciones. Se busca presentar los contenidos de una forma simple y didáctica, que permita al estudiante complementar su estudio formal de esta disciplina. Invitamos a los usuarios a plantear sus consultas y comentarios escribiendo a **info@programacionlineal.net**

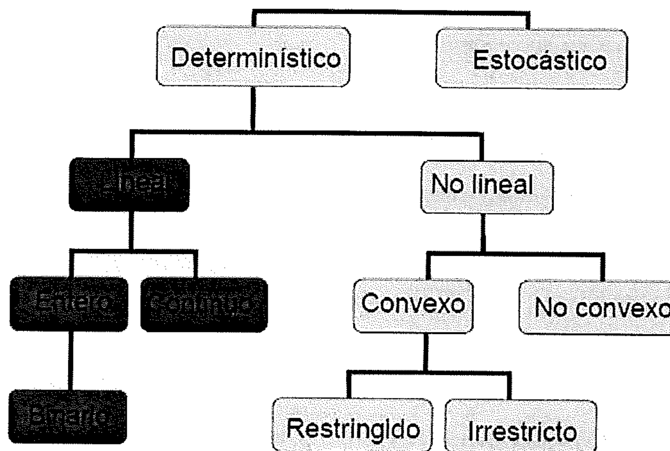
ABR 2011

¿Qué es la Programación Lineal?



Un modelo de **Programación Lineal (PL)** considera que las variables de decisión tienen un comportamiento lineal, tanto en la función objetivo como restricciones del problema. En este sentido, la Programación Lineal es una de las herramientas más utilizadas en la Investigación Operativa debido a que por su naturaleza se facilitan los cálculos y en general permite una buena aproximación de la realidad.

Los **Modelos Matemáticos** se dividen básicamente en **Modelos Determistas (MD)** o **Modelos Estocásticos (ME).** En el primer caso (MD) se considera que los parámetros asociados al modelo son conocidos con certeza absoluta, a diferencia de los Modelos Estocásticos, donde la totalidad o un subconjunto de los parámetros tienen una distribución de probabilidad asociada. Los cursos introductorios a la Investigación Operativa generalmente se enfocan sólo en Modelos Determistas.



Supuestos Básicos de la Programación Lineal: Linealidad, Modelos Deterministas, Variables reales, No Negatividad.

APLICACIONES

1. Problema de la Dieta: (Stigler, 1945). Consiste en determinar una dieta de manera eficiente, a partir de un conjunto dado de alimentos, de modo de satisfacer requerimientos nutricionales. La cantidad de alimentos a considerar, sus características nutricionales y los costos de éstos, permiten obtener diferentes variantes de este tipo de modelos. Por ejemplo:

	Leche (lt)	Legumbre (1 porción)	Naranjas (unidad)	Requerimientos Nutricionales
Niacina	3,2	4,9	0,8	13
Tiamina	1,12	1,3	0,19	15
Vitamina C	32	0	93	45
Costo	2	0,2	0,25	

Variables de Decisión:

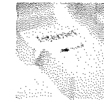
X1: Litros de Leche utilizados en la Dieta
X2: Porciones de Legumbres utilizadas en la Dieta
X3: Unidades de Naranjas utilizadas en la Dieta

Función Objetivo: (Minimizar los Costos de la Dieta) **Min 2X1 + 0,2X2 + 0,25X3**

Restricciones: Satisfacer los requerimientos nutricionales

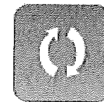
Niacina: **3,2X1 + 4,9X2 + 0,8X3 >= 13**
Tiamina: **1,12X1 + 1,3X2 + 0,19X3 >=15**
Vitamina C: **32X1 + 0X2 + 93X3 >= 45**
No Negatividad: **X1>=0; X2>=0; X3>=0**

Compruebe utilizando nuestro **Módulo de Resolución** que la solución Óptima es **X1=0, X2=11,4677, X3=0,483871,** con Valor Óptimo **V(P)=2,4145.**



NUESTROS REFERIDOS
A continuación se presenta un compendio de Links de Interés para el usuario.

Investigación de Operaciones
Investigación Operativa
Departamento de Industrias UTFSM



ENLACES PATROCINADOS
Links patrocinados que pueden resultar de interés para el usuario.

¿CÓMO UTILIZAR EL COMPLEMENTO SOLVER DE MS EXCEL?

Solver es un excelente complemento de MS Excel que permite la resolución de pequeños y medianos problemas de Programación Lineal. En la mayoría de las aplicaciones con fines estudiantiles es suficiente para resolver dichas instancias. Si usted requiere instalar este complemento puede revisar el siguiente **tutorial de instalación de Solver**. Ahora, veamos cómo funciona con un simple ejemplo:

MAX 10X + 16Y
S.A. 2X + 2Y <= 8
...... **1X + 2Y <= 6**
..... **X>= 0, Y>= 0**

PASO 1. Se ingresan los parámetros a una planilla de cálculo. Las celdas marcadas en amarillo corresponde a las "Celdas Cambiantes" o variables de decisión del modelo. La Celda C2 corresponde al Valor de la Función Objetivo que esta dada por: A2*A3 + C2*C3. Las Celdas C5 Y C6 almacenan el valor o lado izquierdo de las restricciones 1 y 2, quedando definidas como A2*A5 + B2*B5 y A2*A6 + B2*B6, respectivamente.

	A	B	C	D
1	X	Y	V(P)	
2			0	
3	10	16		
4				
5	2	2	0	8
6	1	2	0	6

PASO 2. Se inicia la aplicación Solver y se cargan los datos de la planilla.

Celda objetivo: $C$2
Valor de la celda objetivo:
(•) Máximo ( ) Mínimo ( ) Valores de:
Cambiando las celdas
$A$2:$B$2
Sujetas a las siguientes restricciones:
$C$5 <= $D$5
$C$6 <= $D$6

PASO 3. Una vez ingresados los parámetros se

2. Problema de Dimensionamiento de Lotes: (Wagner y Whitin, 1958). Consiste en hallar una política óptima de producción para satisfacer demandas fluctuantes en el tiempo, de modo de minimizar los costos de producción e inventario, considerando la disponibilidad de recursos escasos.

Considere que una fabrica puede elaborar hasta 150 unidades en cada uno de los 4 periodos en que se ha subdividido el horizonte de planificación y se tiene adicionalmente la siguiente información:

Periodos	Demandas (unidades)	Costo Prod. (US$/unidad)	Costo de Inventario (US$/unidad)
1	130	6	2
2	80	4	1
3	125	8	2.5
4	195	9	3

Adicionalmente considere que se dispone de un Inventario Inicial de 15 unidades y no se acepta demanda pendiente o faltante, es decir, se debe satisfacer toda la demanda del período.

Variables de Decisión:

Xt: Unidades elaboradas en el período t (Con t =1,2,3,4)
It: Unidades en inventario al final del período t (Con t =1,2,3,4)

Función Objetivo: (Minimizar los Costos de Producción e Inventarios) **Min 6X1 + 4X2 + 8X3 + 9X4 + 2I1 + 1I2 + 2,5I3+ 3I4**

Restricciones:

Capacidad de Producción por Período: **Xt <= 150** (Con t =1,2,3,4)
Satisfacer Demanda Período 1: **X1 + I0 - I1 = 130** (I0 = 15)
Satisfacer Demanda Período 2: **X2 + I1 - I2 = 80**
Satisfacer Demanda Período 3: **X3 + I2 - I3 = 125**
Satisfacer Demanda Período 4: **X4 + I3 - I4 = 195**
No Negatividad: **Xt >=0, It >=0**

Solución Óptima utilizando **Solver de MS Excel** (Para ver una aplicación de esta herramienta ingrese **AQUI**): **X1=115, X2=150, X3=100, X4=150, I1=0, I2=70, I3=45, I4=0.** Valor Óptimo **V(P)=3.622,5**

3. Problema de Transporte: (Hitchcock, 1941; Kantorovich, 1942; Koopmans 1947).

PREGUNTAS FRECUENTES (FAQ)

Invitamos cordialmente a los usuarios del sitio al hacer llegar sus consultas ingresando a nuestro **Formulario de Contacto:**



1. ¿Cómo puedo constatar que un problema de Programación Lineal tiene infinitas soluciones?
R: Un problema de PL tiene infinitas soluciones si en la tabla final del Método Simplex un costo reducido asociado a una variable no básica igual a cero.

2. Utilizando el Método Simplex de 2 Fases, ¿Cómo compruebo que el problema asociado es infactible?
R: Esto se comprueba si el valor de la función objetivo terminada la Fase I es distinto de cero.

3. ¿Puede existir una restricción activa con precio sombra asociado igual a cero?
R: Si. Sin embargo, este caso es más la excepción que la regla.

4. ¿Es incorrecto considerar como variable que entra a la base alguna variable no básica con costo reducido negativo, pero no el "más negativo" de todos? (Método Simplex)
R: No es incorrecto. En general, se utiliza como criterio seleccionar como variable entrante a la base aquella variable no básica con costo reducido más negativo, de modo de que en menos iteraciones podamos alcanzar el óptimo en caso que éste exista (rapidez de convergencia).

5. Utilizando el Método Simplex, ¿Cómo se puede detectar que un problema de Programación Lineal es no acotado?
R: Esta situación se detecta cuando al realizar el cálculo de la variable que deja la base, todos los elementos **Ykj** de la columna **j** en la tabla son negativos, para **j** el índice de una variable no básica con costo reducido negativo.

6. Si el problema Dual asociado a un modelo de Programación Lineal es no acotado, ¿Qué situación se verifica con el modelo Primal?
R: Si el modelo Dual es no acotado, entonces el Primal es infactible.

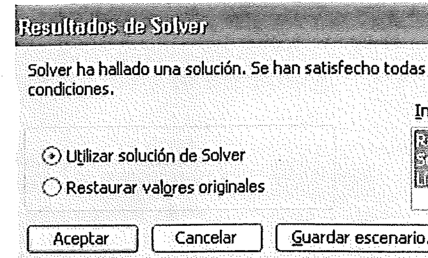
7. ¿Cómo se verifica que un problema lineal es infactible?
R: Si todas las entradas en la columna correspondiente a una variable no básica con costo reducido negativo son negativas o igual a cero.

8. ¿Qué significa que un modelo de programación lineal sea infactible?
R: Básicamente consiste en que no existen valores que puedan adoptar las variables de decisión de modo que se verifique el cumplimiento de todas las restricciones del modelo.

selecciona "Opciones". Una vez dentro de este menu se deben activar las opciones de "Adoptar modelo lineal" y "Asumir no negativos". Luego se selecciona "Aceptar" y luego "Resolver".

☑ Adoptar modelo lineal
☑ Asumir no negativos

PASO 4. Si el modelo admite solución se obtienen los resultados. Se recomienda seleccionar los Informes que sugiere Solver para una mayor comprensión del modelo resuelto.



PASO 5. Los resultados son desplegados en las celdas cambiantes y se verifica el cumplimiento de las restricciones del problema. La Solución Óptima es **X=2, Y=2** con Valor Óptimo **V(P)=52.** Adicionalmente, ambas restricciones se encuentran activas, es decir, se cumplen en igualdad.

	A	B	C	D
1	X	Y	V(P)	
2	2	2	52	
3	10	16		
4				
5	2	2	8	8
6	1	2	6	6

PASO 6. Al seleccionar los Informes de Respuesta, en particular el "Informe de Sensibilidad" se obtiene información relevante sobre el modelo propuesto.

Respecto a las **celdas cambiantes** (variables de decisión) se incluye un intervalo de variación para los coeficientes en la función objetivo que mantienen la actual Solución Óptima. Por ejemplo C1 (Coeficiente que acompaña a X en la función objetivo, actualmente igual a 10) puede variar en el siguiente intervalo garantizando la actual Solución Óptima: {10 - 2, 10 + 6} = **{8, 16}**. De la misma forma el intervalo para C2 (Coeficiente que acompaña a Y en la función objetivo, actualmente igual a 16) es **{10, 20}**

En cuanto a las **restricciones**, el precio sombra de la restricción 1 es **2**, el cual es válido siempre y cuando la variación en el lado derecho se encuentre en el intervalo {8 - 2, 8 + 4} = **{6, 12}**. De la misma forma, el precio sombra para la restricción 2 es 6, válido en el intervalo de variación del lado derecho entre **{4, 8}**.

Microsoft Excel 11.0 Informe de sensibilidad
Hoja de cálculo: [Libro1.xls]Ejemplo Sillas y Mesas

Celdas cambiantes

Celda	Nom.	Valor Igual	Gradiente reducido	Coeficiente objetivo	Aumento permisible	Disminución permisible
$A$2	X	2	0	10	6	2
$B$2	Y	2	0	16	4	6

Restricciones

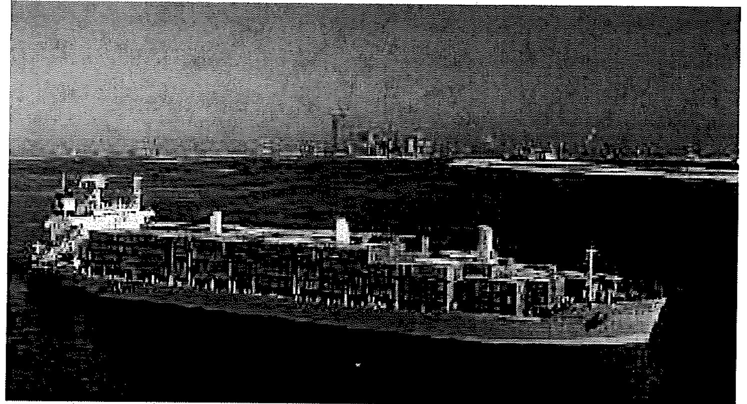
Celda	Nom.	Valor Igual	Sombra precio	Restricción lado derecho	Aumento permisible	Disminución permisible
$C$5	V(P)	8	2	8	4	2
$C$6	V(P)	6	6	6	2	2

Para ver una aplicación de Solver a una aplicación de mayor tamaño ingrese **AQUI**. Se recomienda adicionalmente revisar el siguiente **Tutorial de Solver**.

Enlaces de Interés: academies de tennis en Espagne centro formacion coaching curso de auxiliar de enfermería cursos de ingles en el extranjero formacion proveedor de material didactico

Origen de la programación lineal

En los siglos XVII y XVIII, grandes matemáticos como **Newton**, **Leibnitz**, **Bernouilli** y, sobre todo, **Lagrange**, que tanto habían contribuido al desarrollo del cálculo infinitesimal, se ocuparon de obtener máximos y mínimos condicionados de determinadas funciones.



Posteriormente el matemático fránces Jean Baptiste-Joseph **Fourier** (1768-1830) fue el primero en intuir, aunque de forma imprecisa, los métodos de lo que actualmente llamamos programación lineal y la potencialidad que de ellos se deriva.

Si exceptuamos al matemático **Gaspar Monge** (1746-1818), quien en 1776 se interesó por problemas de este género, debemos remontarnos al año 1939 para encontrar nuevos estudios relacionados con los métodos de la actual programación lineal. En este año, el matemático ruso Leonodas Vitalyevich **Kantarovitch** publica una extensa monografía titulada *Métodos matemáticos de organización y planificación de la producción* en la que por primera vez se hace corresponder a una extensa gama de problemas una teoría matemática precisa y bien definida llamada, hoy en día, programación lineal .

En 1941-1942 se formula por primera vez el problema de transporte, estudiado independientemente por **Koopmans y Kantarovitch**, razón por la cual se suele conocer con el nombre de *problema de Koopmans-Kantarovitch.*

Tres años más tarde, **G. Stigler** plantea otro problema particular conocido con el nombre de régimen alimenticio optimal.

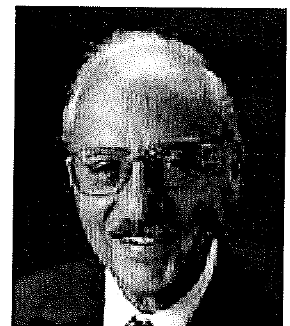
En estos años posteriores a la Segunda Guerra Mundial, en Estados Unidos se asumió que la eficaz coordinación de todas las energías y recursos de la nación era un problema de tal complejidad, que su resolución y simplificación pasaba necesariamente por los modelos de optimización que resuelve la programación lineal.

Paralelamente a los hechos descritos se desarrollan las técnicas de computación y los ordenadores, instrumentos que harían posible la resolución y simplificación de los problemas que se estaban gestando.

En 1947, **G.B. Dantzig** formula, en términos matemáticos muy precisos, el enunciado estándar al que cabe reducir todo problema de programación lineal. Dantzig, junto con una serie de investigadores del *United States Departament of Air Force*, formarían el grupo que dio en denominarse *SCOOP (Scientific Computation of Optimum Programs).*

Una de las primeras aplicaciones de los estudios del grupo SCOOP fue el puente aéreo de Berlín. Se continuó con infinidad de aplicaciones de tipo preferentemente militar.

Hacia 1950 se constituyen, fundamentalmente en Estados Unidos, distintos grupos de estudio para ir desarrollando las diferentes ramificaciones de la programación lineal. Cabe citar, entre otros, Rand Corporation, con Dantzig, Orchard-Hays, Ford, Fulkerson y Gale, el departamento de Matemáticas de la Universidad de Princenton, con Tucker y Kuhn, así como la Escuela Graduada de Administración Industrial, dependiente del Carnegie Institute of Technology , con Charnes y Cooper.


G.B. Dantzig

Respecto al método del simplex, que estudiaremos después, señalaremos que su estudio comenzó en el año 1951 y fue desarrollado por Dantzig en el *United States Bureau of Standards SEAC COMPUTER*, ayudándose de varios modelos de ordenador de la firma IBM.

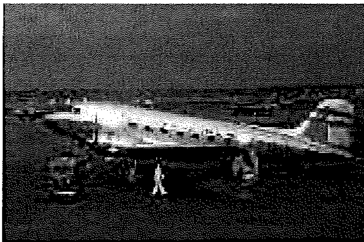
Los fundamentos matemáticos de la programación lineal se deben al matemático norteamericano de origen húngaro **Janos von Neuman** (1903-1957), quie en 1928 publicó su famoso trabajo *Teoría de Juegos*. En 1947 conjetura la equivalencia de los problemas de programación lineal y la teoría de matrices desarrollada en sus trabajos. La influencia de este respetado matemático, discípulo de David Hilbert en Gotinga y, desde 1930,

catedrático de la *Universidad de Princenton de Estados Unidos*, hace que otros investigadores se interesaran paulatinamente por el desarrollo riguroso de esta disciplina.

En 1858 se aplicaron los métodos de la programación lineal a un problema concreto: *el cálculo del plan óptimo de transporte de arena de construcción a las obras de edificación de la ciudad de Moscú.* En este problema había 10 puntos de partida y 230 de llegada. El plan óptimo de transporte, calculado con el ordenador *Strena* en 10 días del mes de junio, rebajó un 11% los gastos respecto a los costes previstos.

Se ha estimado, de una manera general, que si un país subdesarrollado utilizase los métodos de la programación lineal, su producto interior bruto (PIB) aumentaría entre un 10 y un 15% en tan sólo un año.

La programación lineal hace historia: El puente aéreo de Berlín



En 1946 comienza el largo período de la guerra fría entre la antigua Unión Soviética (URSS) y las potencias aliadas (principalmente , Inglaterra y Estados Unidos). Uno de los episodios más llamativos de esa guerra fría se produjo a mediados de 1948, cuando la URSS bloqueó las comunicaciones terrestres desde las zonas alemanas en poder de los aliados con la ciudad de Berlín, iniciando el bloqueo de Berlín. A los aliados se les plantearon dos posiblidades: o romper el bloqueo terrestre por la fuerza, o llegar a Berlín por el aire. Se adoptó la decisión de programar una demostración técnica del poder aéreo norteamericano; a tal efecto, se organizó un gigantesco puente aéreo para abastecer la ciudad: en diciembre de 1948 se estaban transportando 4500 toneladas diarias; en marzo de 1949, se llegó a las 8000 toneladas, tanto como se transportaba por carretera y ferrocarril antes del corte de las comunicaciones. En la planificación de los suministros se utilizó la programación lineal. (El 12 de mayo de 1949, los soviéticos levantaron el bloqueo)



DECISION MODELING WITH MICROSOFT EXCEL

Chapter 4

Linear Optimization: Sensitivity Analysis

Part 1

Copyright 2001
Prentice Hall Publishers and
Ardith E. Baker

Sensitivity Analysis

Sensitivity analysis is the effect a (small) change of an exogenous variable has upon another variable.

In the case of optimization models, sensitivity analysis refers to the process of analyzing such changes in a model <u>after</u> the optimal solution has been found.

We will use 2-dimensional graphs (i.e., only two decision variables) to give insight into LP sensitivity analysis. In addition, we will use Solver Sensitivity Report and SolverTable.

Oak Products Model

Let's return to the Oak Products model of Chapter 3. In this simplified model, there are only two decision variables:

Captains chairs (*C*)

Mates chairs (*M*)

Now, review the symbolic model containing the objective function and constraints.

Symbolic Model

Max 56C + 40M (objective function)

Subject to

$8C + 4M \leq 1280$ (Long Dowels Restriction)

$4C + 12M \leq 1600$ (Short Dowels Restriction)

$C + M \geq 100$ (Minimum Production)

$4C + 4M \leq 760$ (Legs Restriction)

$C \leq 140$ (Heavy Seats Restriction)

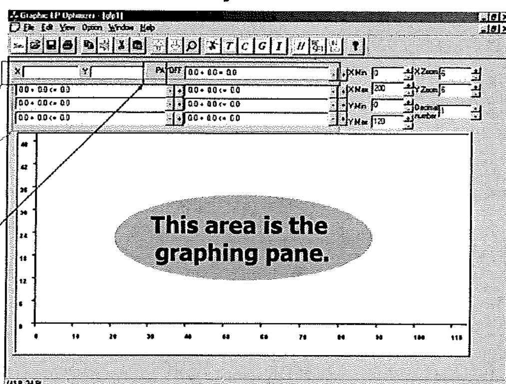
$M \leq 120$ (Light Seats Restriction)

$C \geq 0$ and $M \geq 0$ (Nonnegativity Conditions)

Using GLP

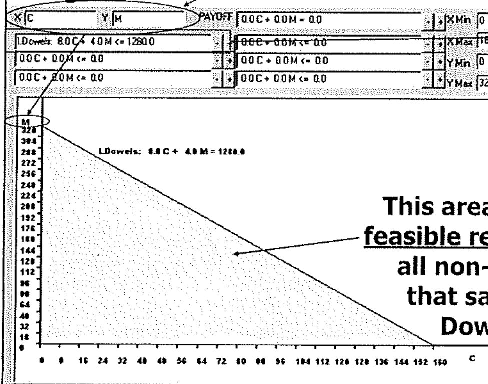
We will use Stanford Graphic LP Optimizer (GLP) to analyze the LP model.

Type labels for the X,Y axes, enter up to 6 constraints, and the objective function (PAYOFF) here.



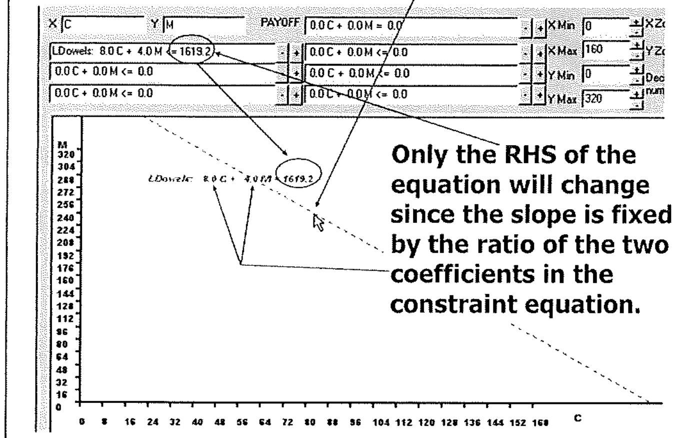
First, obtain a graphical portrayal of the constraint set.
For this example, *M* is arbitrarily assigned to the vertical axis.

Start with the Long Dowels (LDOWELS) constraint. Note that the ":" separates the label from the constraint.

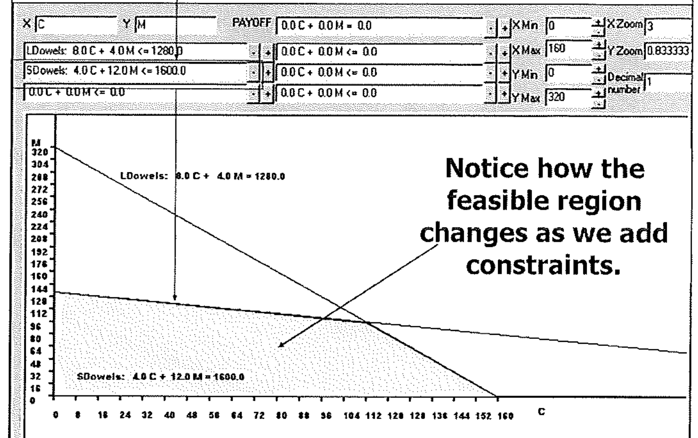


This area represents the <u>feasible region</u> (the set of all non-negative points that satisfies the Long Dowels constraint).

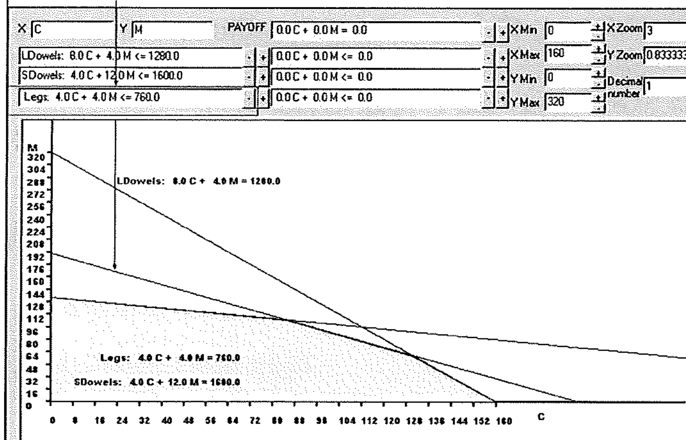
Note that you can drag the constraint line and observe what happens to the feasible region.



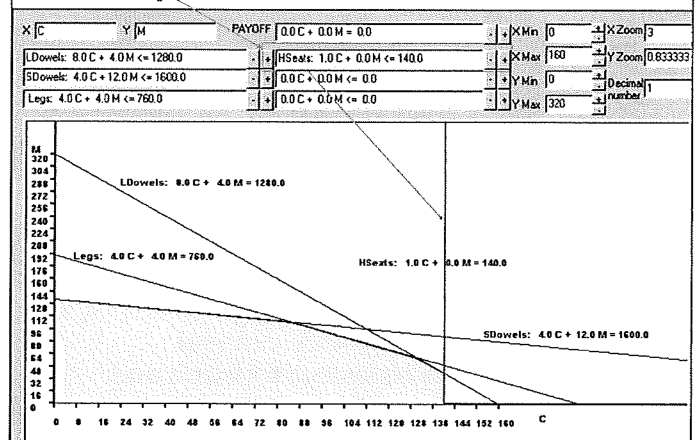
Add the remaining constraints:
Short Dowels



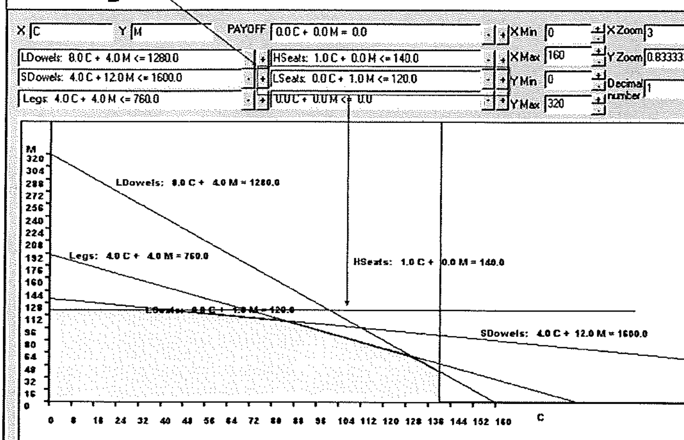
Add the remaining constraints:
Legs



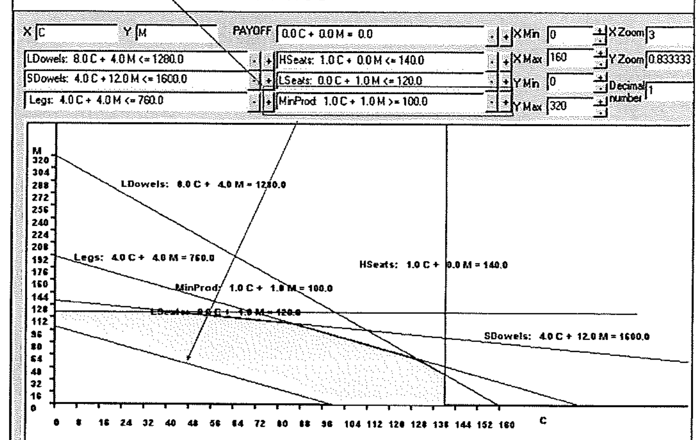
Add the remaining constraints:
Heavy Seats



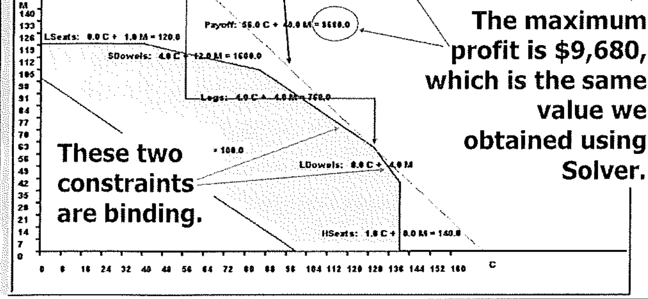
Add the remaining constraints:
Light Seats



Add the remaining constraints:
Minimum Product



Note that the isoprofit line intersects the feasible region at one point. This point is called an *unique optimal solution* to our model.



The maximum profit is \$9,680, which is the same value we obtained using Solver.

These two constraints are binding.

Now that we know an optimal solution exists, just what is the *unique optimal solution* to our model?

The coordinates of this point are displayed in the status bar at the bottom of the program.

Ready | Optimal Decisions(C, M): (130.0, 60.0)

This means that we will make 130 Captains chairs and 60 Mates chairs. This is the *optimal solution* (or just *solution*).

The *optimal objective value* (or just *optimal value, OV*) is calculated using the above *solution* and the objective function:

$$56(130) + 40(60) = \$9,680$$

20

Important Notes

The following notes apply to all LP solutions:

- The optimal solution to any LP model will *never* occur at an interior point of the feasible region (except when every feasible solution is optimal).
- Geometrically, a *binding constraint* is one that passes through the optimal solution.
- Geometrically, a *non-binding constraint* is one that does not pass through the optimal solution.

21

Important Notes

The following notes apply to all LP solutions:

- Adding constraints to a model will either impair the *OV* or leave it unchanged.
- Deleting constraints will either improve the *OV* or leave it unchanged.
- Adding decision variables will either improve the *OV* or leave it unchanged.
- Deleting decision variables will either impair the *OV* or leave it unchanged.

22

Extreme Points

The corners of the feasible region are called *Extreme Points.*

SDowels: 4.0 C + 12.0 M = 1600.0
Legs: 4.0 C + 4.0 M = 760.0
MinProd: 1.0 C + 1.0 M = 100.0
LDowels: 8.0 C + 4.0 M
HSeats: 1.0 C +

The solution to the model will occur at one of the extreme points.

23

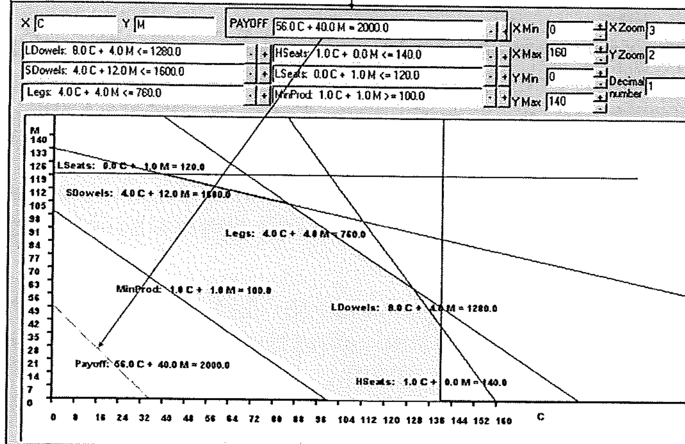
To illustrate this, in GLP, change only the profit-per-chair contribution margin for the Mate chair from \$40 to \$80 per unit (i.e., change the objective function to: 56C + 80M=9680).

X C | Y M | PAYOFF 56.0 C + 80.0 M = 9680.0
LDowels: 8.0 C + 4.0 M <= 1280.0 | HSeats: 1.0 C + 0.0 M <= 140.0
SDowels: 4.0 C + 12.0 M <= 1600.0 | LSeats: 0.0 C + 1.0 M <= 120.0
Legs: 4.0 C + 4.0 M <= 760.0 | MinProd: 1.0 C + 1.0 M >= 100.0

Then, press on the *AutoMax* button to find the optimal solution using this new objective function.

24

Finally, add the Objective Function and rescale.



Feasible Region

Remember, the Feasible Region is the region that satisfies <u>all</u> the constraints.

NOTE:

<u>Adding</u> additional constraints can never enlarge the Feasible Region, but leaves it either unchanged or smaller.

<u>Deleting</u> constraints leaves the Feasible Region either unchanged or larger.

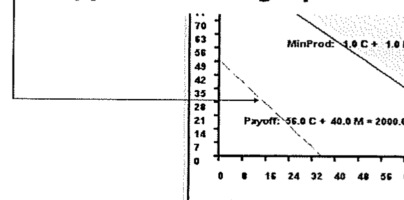
Optimal Solution

A *feasible solution* (or *feasible decision*) is any pair of values for *C* and *M* that satisfy all the constraints.

Remember, the values for *C* and *M* represent the quantities of each product that will be produced.

Therefore, the *optimal solution* will be a feasible production alternative (i.e., the number of Captain and Mate chairs) that gives the highest possible value to the objective function (i.e., maximum profit contribution).

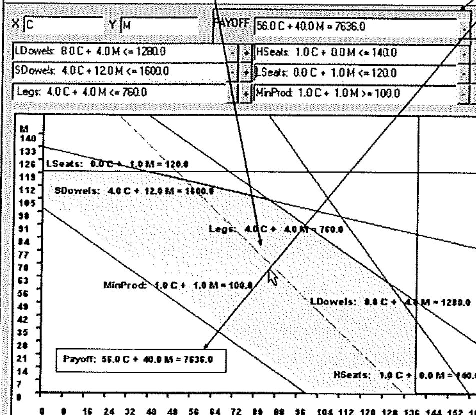
After entering the objective function, a dashed line appears in the graph.



This line gives the set of all values of *C* and *M* that produce exactly $2000 profit (as specified in the dialog), and is thus called the $2000 *isoprofit line*.

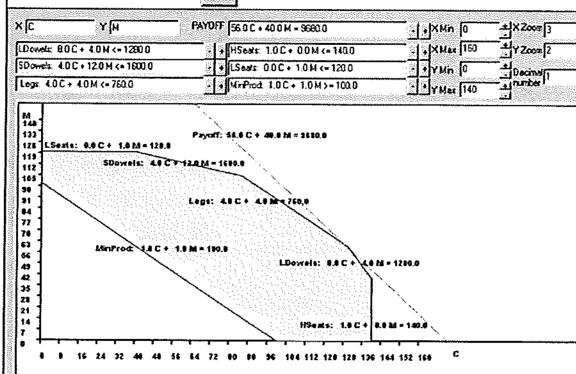
The slope of this line is fixed, but the axes intercept will change as you change the profitability from $2000.

In fact, you can view changes in the Profit by dragging the line in the graph.



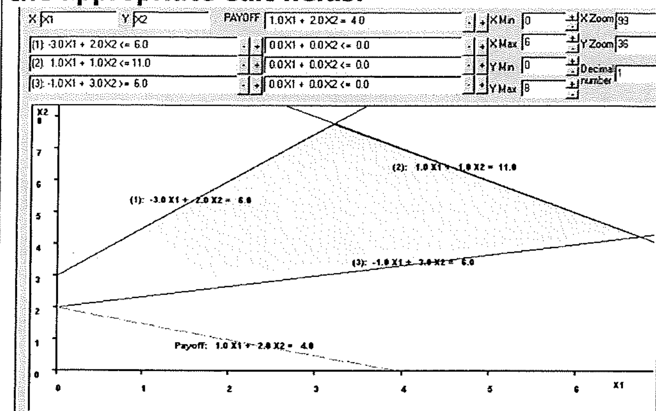
It would not make sense to drag beyond the boundaries of the feasible region.

To find the optimal solution using GLP, click on the *AutoMax* button.



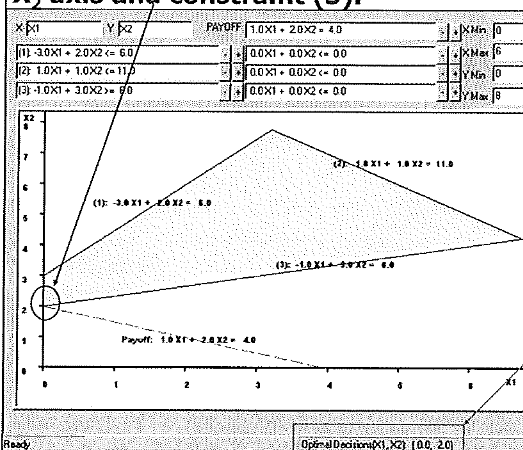
Use the *Scissors* button to clean up superfluous line segments from the constraints.

Enter the objective function and constraints into the appropriate edit fields.



To solve, click on the *AutoMin* button:

The optimal solution lies at the intersection of the X_2 axis and constraint (3).



The optimal solution that minimizes the objective function is: 0 of X_1 2 of X_2

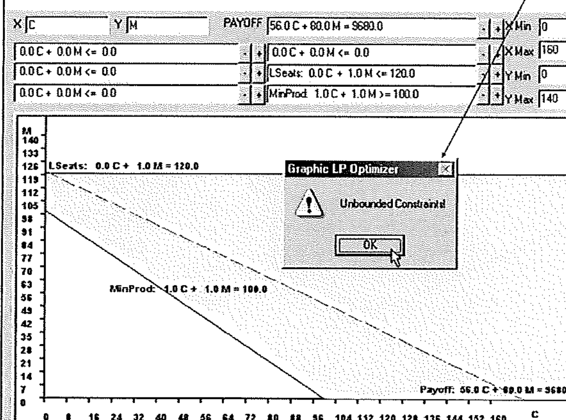
Unbounded Models

Unbounded models typically occur when one or more important constraints have been left out of the model.

In this case, it results in an infinite number of allowable values for the decision variables that will improve the objective value.

To illustrate this, remove the first four constraints from the Oak Products model and try to solve it using GLP.

After clicking *AutoMax*, GLP displays a message that the model is unbounded.



Infeasible Models

Infeasibility (or *inconsistency*) refers to a model with an empty feasible region.

This means that there is no combination of values for the decision variables that simultaneously satisfies all the constraints.

To illustrate this, consider the following LP model:

Max $50E + 40F$

s.t.

$E + F \leq 5$

$E - 3F \leq 0$

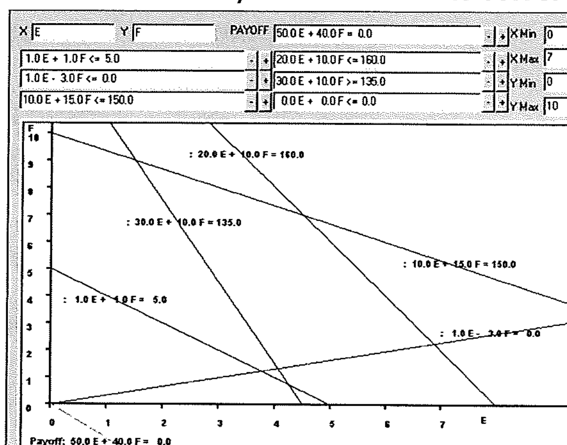
$10E + 15F \leq 150$

$20E + 10F \leq 160$

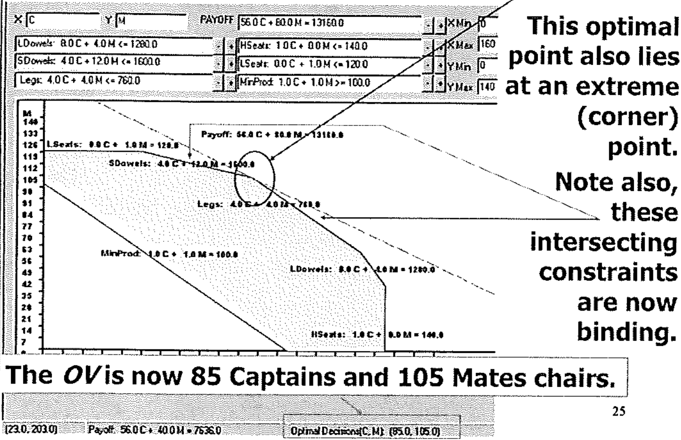
$30E + 10F \geq 135$

$E + F \geq 0$

In GLP, enter the constraints and objective function. Next, click *AutoMax* to solve.



As you can see, the feasible region remains unchanged. However, there is now a new optimal point.

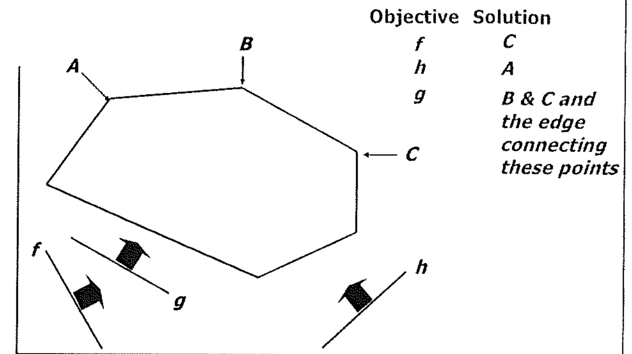


This optimal point also lies at an extreme (corner) point.

Note also, these intersecting constraints are now binding.

The *OV* is now 85 Captains and 105 Mates chairs.

Examine this six-sided constraint set and contours of 3 *different* objective functions (*f, g, h*).

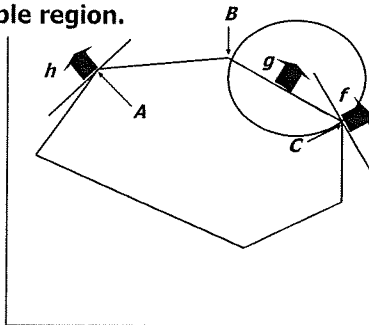


Objective	Solution
f	*C*
h	*A*
g	*B & C and the edge connecting these points*

Note the direction each objective function is pointing. In each case there is an optimal solution at a corner.

Notice objective function *g*.

This is a case of *multiple optima* (or *alternative optima*) when the objective contour coincides with one of the constraint lines on the boundary of the feasible region.



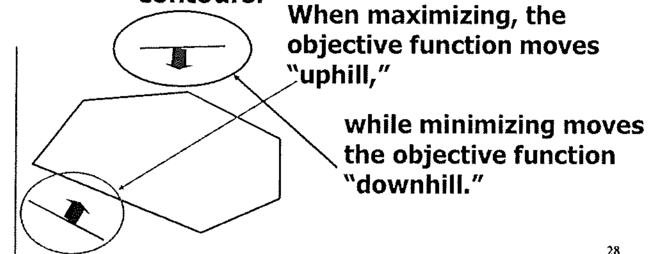
This occurs when the objective function contour has the same <u>slope</u> as the constraint, resulting in multiple optimal solutions.

In an LP model, if there is an optimal solution, there is always at least one optimal corner solution.

Minimization Model

The graphical method can also be applied to a minimization (Min) model.

The only difference between Max and Min LP models is the optimizing direction of the objective function contours.



When maximizing, the objective function moves "uphill,"

while minimizing moves the objective function "downhill."

Minimization Model

The goal in Min LP models is to find the corner of the feasible region that lies on the lowest-valued objective function contour that still intersects the feasible region.

In a Max model, the objective function contours are called *isoprofit* (or *profit*) lines.

In a Min model, the objective function contours are called *isocost* (or *cost*) lines.

Minimization Model

Let's look at a simple Min model in two decision variables (X_1 and X_2).

Min $X_1 + 2X_2$

s.t.

$-3X_1 + 2X_2 \leq 6$

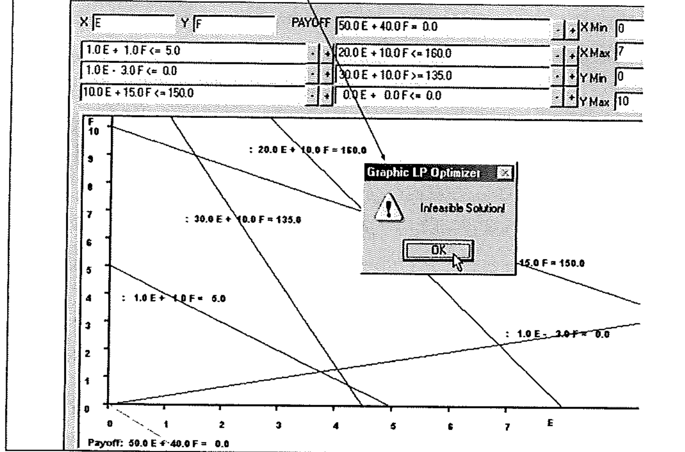
$X_1 + X_2 \leq 11$

$-X_1 + 3X_2 \geq 6$

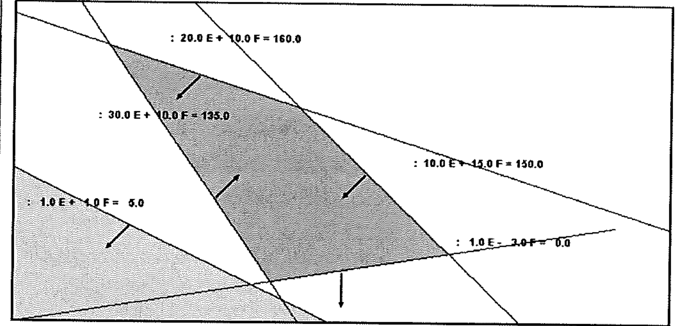
$X_1, X_2 \geq 0$

Now use GLP to find the optimal solution.

After clicking *AutoMax*, GLP displays a message that the model is infeasible.



Note the direction (i.e., ≤ or ≥ that each constraint is pointing. As you can see, there is no one region that satisfies all the constraints.



Infeasibility depends solely on the constraints and has nothing to do with the objective function.

Important Notes

Every linear program will fall into one of the following three mutually exclusive categories:

1. The model has an optimal solution.
2. There is no optimal solution, because the model is unbounded.
3. There is no optimal solution, because the model is infeasible.

Sensitivity Analysis

How sensitive is the optimal solution to any inexact data?

The answer to this question will help determine the credibility of the model's recommendations.

For example, if the *OV* changes very little with large changes in the value of a particular parameter, you would not be concerned about uncertainty in that value.

However, if the *OV* varies wildly with small changes in that parameter, you cannot tolerate uncertainty in its value.

Sensitivity Analysis

In mathematical terms, *sensitivity analysis* (*post optimality analysis*) is the concept of the partial derivative, where all variables are held constant except for one. This is also known in economics as *marginal analysis*.

Sensitivity analysis is based on the proposition that all parameter values except for one number in the model are held fixed.

The graphical approach is ideal for determining how changes in two-decision-variable models affects the solution.

Sensitivity Analysis

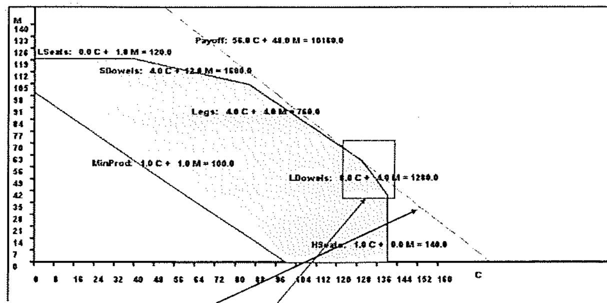
Changes in the Objective Function Coefficients

Suppose that the constraint data remain unchanged and only the objective coefficients are changed.

The only effect on the model, is that the slope of the isoprofit line will change.

By changing the coefficients of the Oak Products model's objective function, you can see that some of those changes will not necessarily change the optimal solution, even though the isoprofit lines will have a different slope.

For example, change the objective function from 56C + 40M to 56C + 48M



Only the slope of the isoprofit line changes. However, the optimal values of $C = 130$ and $M = 60$ do not change because the same corner point solution reappears.

Alternative Optimal Solution

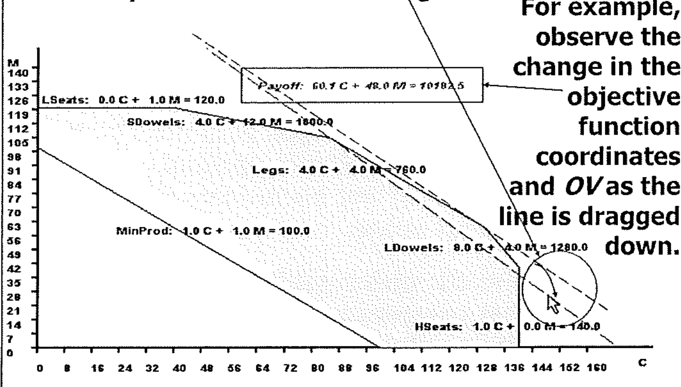
Alternative optimal solutions **occur when the contour of the objective function is parallel to a constraint.**

In the case of a two decision variable model, when the contour of the objective function is parallel to a constraint, there are two optimal corner solutions, and in fact, all the points on the constraint between the two corners are also optimal solutions.

If there is more than one solution to an LP (i.e., there exist alternative optimal solutions) then there are an <u>infinite</u> number of alternative optimal solutions.

To observe the connections among the Payoff slope, corner points, and any movement of the optimal solution from one corner point to another, right-click on the Payoff line in GLP and drag it.

For example, observe the change in the objective function coordinates and *OV* as the line is dragged down.

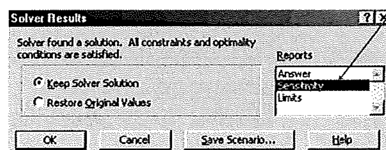


Use Solver's *Sensitivity Report* feature to observe what will happen when the isoprofit line changes.

	A	B	C	D	E	F	G
1		Simplified Oak Products Model					
2	Chair Style	Captain	Mate				
3	Profit / Chair	$56	$40	Profit			
4	Production Qty.	130	60	$9,680			
5		Chair Component Requirements		Total Usage		Start. Inventory	End. Inv.
6	Long Dowels	8	4	1280	≤	1280	0
7	Short Dowels	4	12	1240	≤	1600	360
8	Legs	4	4	760	≤	760	0
9	heavy Seats	1	0	130	≤	140	10
10	Light Seats	0	1	60	≤	120	60
11				Chairs		Min. Prod.	Slack
12	Chair Production	1	1	190	≥	100	90

Return to the Simplified Oak Products model in the Excel spreadsheet.

After running Solver, the *Solver Results* dialog will open in which you can select the *Sensitivity Report*.



This results in the following worksheet:

	A B	C	D	E	F	G	H
1	Microsoft Excel 9.0 Sensitivity Report						
6	Adjustable Cells						
7			Final	Reduced	Objective	Allowable	Allowable
8	Cell	Name	Value	Cost	Coefficient	Increase	Decrease
9	$B$4	Production Qty. Captain	130	0.00	56	24	16
10	$C$4	Production Qty. Mate	60	0.00	40	16	12
11							
12	Constraints						
13			Final	Shadow	Constraint	Allowable	Allowable
14	Cell	Name	Value	Price	R.H. Side	Increase	Decrease
15	$D$12	Chair Production Chairs	190	0.00	100	90	1E+30
16	$D$6	Long Dowels Total Usage	1280	4.00	1280	40	180
17	$D$7	Short Dowels Total Usage	1240	0.00	1600	1E+30	360
18	$D$8	Legs Total Usage	760	6.00	760	72	40
19	$D$9	heavy Seats Total Usage	130	0.00	140	1E+30	10
20	$D$10	Light Seats Total Usage	60	0.00	120	1E+30	60

The solution gives 40 as the Objective Coefficient for Mates chairs.
Holding all other data in the model constant, the Mate Objective Coefficient can <u>increase</u> by up to 16 additional dollars of unit profit and still not change the original LP corner point solution.

Microsoft Excel 9.0 Sensitivity Report

Adjustable Cells

Cell	Name	Final Value	Reduced Cost	Objective Coefficient	Allowable Increase	Allowable Decrease
$B$4	Production Qty. Captain	130	0.00	56	24	16
$C$4	Production Qty. Mate	60	0.00	40	16	12

Constraints

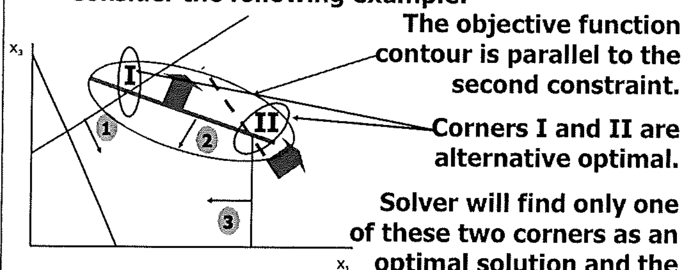
Cell	Name	Final Value	Shadow Price	Constraint R.H. Side	Allowable Increase	Allowable Decrease
$D$12	Chair Production Chairs	190	0.00	100	90	1E+30
$D$6	Long Dowels Total Usage	1280	4.00	1280	40	180
$D$7	Short Dowels Total Usage	1240	0.00	1600	1E+30	360
$D$8	Legs Total Usage	760	6.00	760	72	40
$D$9	heavy Seats Total Usage	130	0.00	140	1E+30	10
$D$10	Light Seats Total Usage	60	0.00	120	1E+30	60

In general, the *Allowable Increase* and *Allowable Decrease* entries indicate how much a given decision variable's Objective Coefficient may change, holding all the other data in the model constant, and still have the same LP solution.

- When a coefficient is changed by less than the allowable amounts, the current optimal solution remains the unique optimal solution.
- For a Max model, when a coefficient is increased by its allowable amount exactly, there will be an alternative optimal corner solution with a larger optimal value for the distinguished variable.
- For a MIN model, increasing a coefficient by the allowable amount exactly will produce an alternative optimum corner with a lower optimal value for the distinguished variable.
- When a variable's coefficient is decreased by its allowable amount, there will be another alternative optimal corner solution with the distinguished variable having a lower (MAX model) or higher (MIN model) optimal value.

- A value of *0* in the *Allowable Increase/Decrease* sections of the Sensitivity Report indicates that there is at least one alternative optimal corner point solution to the model.

Consider the following example:



The objective function contour is parallel to the second constraint.

Corners I and II are alternative optimal.

Solver will find only one of these two corners as an optimal solution and the Sensitivity Report will apply only to that corner.

The Sensitivity Report would report a *0* value in the *Adjustable Cells* column.

- In a *Max* model, increasing the profitability of an activity associated with a decision and keeping all other data unchanged cannot reduce the optimal level of that activity.
- For a *Min* model, increasing the cost of an activity associated with a decision and keeping all other data unchanged cannot increase the optimal level of that activity.

Sensitivity Analysis

Changes in Constraint Right-Hand Sides

Ignoring the objective function, let's observe the effects of right-hand-side changes for inequality constraints.

You can use GLP's graphical analysis to explain the effects of changes in these parameters.

can see the effects of changing the right- -side of the inequality by changing that r directly, by dragging the constraint line king on the - + buttons next to each t in GLP.

Note that:

Tightening an inequality constraint means making it *more difficult* to satisfy.

For a ≥ constraint, this means increasing the RHS.

For a ≤ constraint, this means decreasing the RHS.

Tightening either contracts the feasible region or leaves it unaffected.

Loosening an inequality constraint means making it *easier* to satisfy.

For a ≥ constraint, this means decreasing the RHS.

For a ≤ constraint, this means increasing the RHS.

Loosening either expands the feasible region or leaves it unaffected.